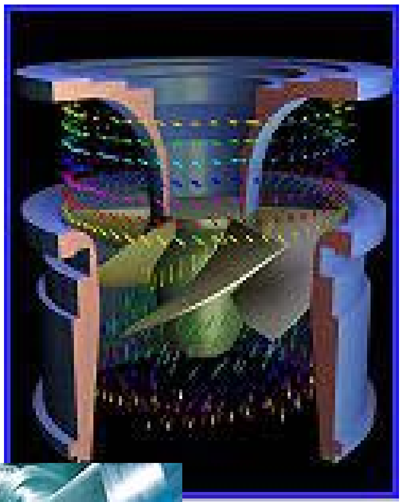
4

ANALISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD FISICA



www.erivera-2001.com

Contenido

4.1. Introducción

En la mecánica de los fluidos es posible obtener importantes resultados a partir de un enfoque dimensional del flujo fluido. Las variables involucradas en cualquier situación física real pueden ser agrupadas en un cierto número de grupos adimensionales independientes los cuales permiten caracterizar fenómeno físico.

La caracterización de cualquier problema mediante grupos adimensionales, se lleva cabo mediante un método denominado análisis dimensional.

El uso de la técnica de análisis dimensional adquiere relevancia sobre todo en la planificación de experimentos y presentación de resultados en forma compacta, sin embargo se utiliza con frecuencia en estudios de tipo teórico.

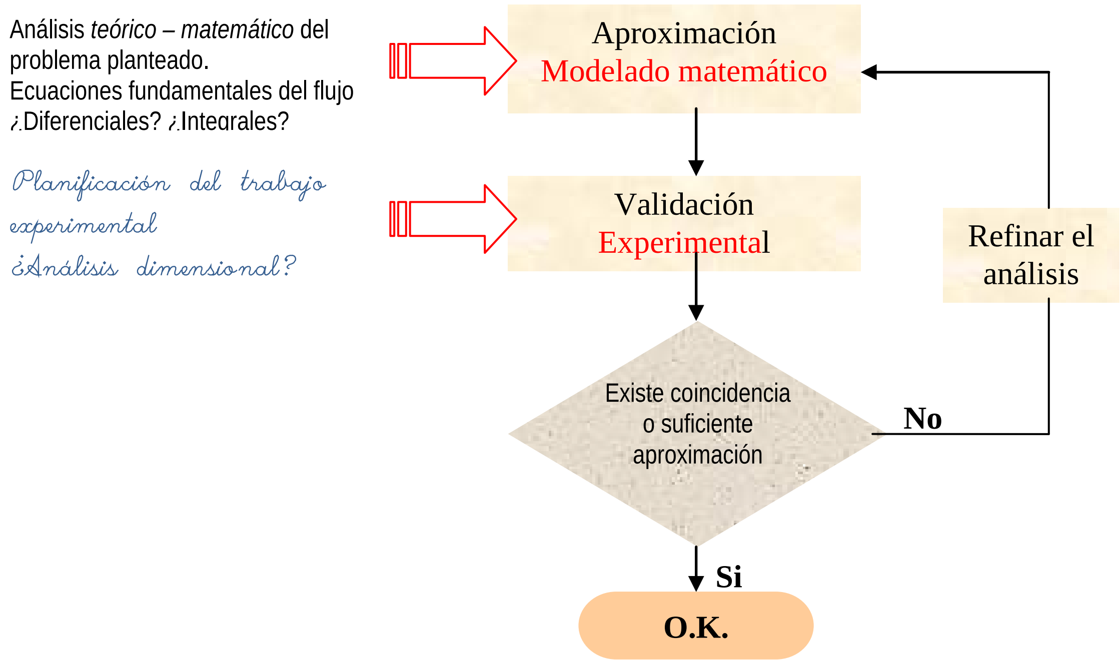
Esencialmente, el análisis dimensional es una técnica que permite reducir el número y complejidad de las variables que intervienen en la descripción de un fenómeno físico dado.

Por otra parte el análisis dimensional permite relacionar los datos medidos en u modelo experimental con la información requerida para el diseño de un prototipo a escala real. Al proporcionar las leyes de escala correspondientes, cuyo componente principal es la similitud geométrica y la igualdad de los parámetros adimensionales que caracterizan el objeto de estudio, entre modelo y prototipo.

Sin embargo debe quedar claro que la técnica del análisis dimensional no puede predecir qué variables son importantes ni permite explicar el mecanismo involucrado en el proceso físico. Si no es con ayuda de las pruebas experimentales. Pese a ello constituye una valiosa herramienta para el ingeniero mecánico.

En este capítulo se muestran medios de evaluación de los parámetros adimensionales y ciertos aspectos de similitud para predecir el comportamiento de flujo de un equipo en base a los resultados experimentales obtenidos de modelos a escala de laboratorio.

La solución de problemas de mecánica de fluidos implica frecuentemente una combinación del estudio analítico y el uso de información experimental.



4.2. ¿Qué es un parámetro adimensional?

Si se considera la ecuación de la viscosidad

$$\tau = \mu \frac{du}{ds}$$

cuya expresión dimensional equivalente es:

$$\frac{M}{L\theta^2} = \frac{M}{L\theta}\frac{L\theta^{-1}}{L} \rightarrow \frac{M}{L\theta^2} = \frac{M}{L\theta^2}$$

Ahora si agrupamos todas las variables implicadas en la ecuación, en un solo miembro, por ejemplo en el segundo, se obtiene:

$$1 = \frac{\mu \frac{du}{ds}}{\tau}$$

La expresión dimensional resultante, de esta nueva expresión será:

$$[1] = \frac{\frac{M}{L\theta^2}}{\frac{M}{L\theta^2}} = [1]$$

Se ve que las variables μ, τ, du/ds, agrupadas en la forma indicada tienen una expresión dimensional equivalente es 1. Se dice en estos casos que el grupo es adimensional.

Entonces se puede decir, en general, que un parámetro adimensional es un grupo de variables agrupadas de tal forma que su expresión dimensional mas simple es 1. Es decir que no tiene dimensiones.

En la mecánica de los fluidos estos grupos adimensionales tienen, por lo general, un significado físico.

4.3. Naturaleza adimensional del flujo fluido

Según se discutió en el capitulo 1, el principio de *homogeneidad dimensional* establece que cada termino -grupo de variables - de una ecuación analítica que expresa un hecho físico real, debe satisfacerse en cualquier sistema de unidades o lo que es lo mismo debe ser consistente dimensionalmente. Así por ejemplo, la ecuación de *Bernoulli:*

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p = C \quad \textbf{(1);}$$

tiene la siguiente expresión dimensional para cada uno de sus términos

$$\frac{M}{L\theta^2} + \frac{M}{L\theta^2} + \frac{M}{L\theta^2} = \frac{M}{L\theta^2} \quad \textbf{(2)}$$

Ahora si dividimos ambos miembros de la ecuación (1) entre la presión, se tiene:

$$\rho\frac{v^2}{2p}+\frac{\rho g z}{p}+1=\frac{C}{p} \quad \textbf{(3)}$$

cuya expresión dimensional es:

$$\cancelto{1}{\frac{\frac{M}{L\theta^2}}{\frac{M}{L\theta^2}}}+\cancelto{1}{\frac{\frac{M}{L\theta^2}}{\frac{M}{L\theta^2}}}+1=\cancelto{1}{\frac{\frac{M}{L\theta^2}}{\frac{M}{L\theta^2}}}$$

Es decir que cada uno de los términos –grupos de variables- de la ecuación resultante (3), carecen de dimensiones, dicho de otro modo son adimensionales.

De lo anterior podemos sacar dos conclusiones:

- Es posible generar, a partir del conjunto de variables implicadas en un fenómeno físico dado, un conjunto de grupos adimensionales.

- Cuando se conoce la ecuación analítica que relaciona las variables que intervienen en un fenómeno físico dado, se pueden obtener parámetros adimensionales a partir de la misma.

Pero ¿Que pasa cuando no se conoce la relación entre las variables que intervienen en el fenómeno físico en cuestión?

La respuesta a esta interrogante es: *Es posible generar un conjunto de grupos adimensionales a partir de las variables del problema objeto de estudio, mediante un procedimiento llamado análisis dimensional.*

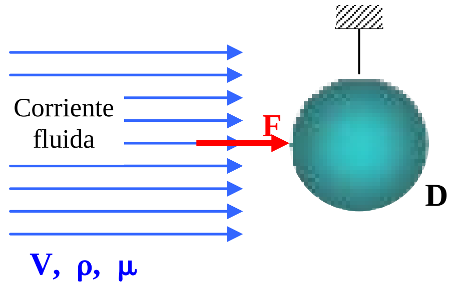
¿Es posible mediante esta técnica determinar la relación entre estos grupos adimensionales?

Como ya se mencionó, el análisis dimensional permite determinar solamente los grupos adimensionales que caracterizan el problema, más no la relación funcional entre estos. Para ello deberá necesariamente planificarse un estudio experimental que complemente el análisis dimensional inicial, en esta fase de planificación el análisis dimensional juega un rol importante.

La complejidad fenomenológica y geométrica de la mayor parte de los procesos de flujo fluido hace que, frecuentemente, las ecuaciones analíticas –Integrales y diferenciales- que explican los principios que rigen el flujo fluido no sean suficientes para resolver con exactitud una situación concreta de flujo fluido. Por ello la solución de problemas reales depende tanto del análisis así como de la información experimental disponible. Sin embargo, la realización de experimentos implica el empleo de tiempo y dinero, parámetros que aumentan en proporción directa al número de ensayos a realizar. En este contexto la técnica del análisis dimensional que permite planificar el trabajo experimental de manera que se pueda obtener la mayor información posible con un menor número de experimentos y por ende a un menor costo y tiempo.

Lo anterior queda mejor explicado con el siguiente ejemplo: *¿Cómo determinar experimentalmente la fuerza de arrastre **F** sobre una esfera lisa de diámetro **D** que se mueve en un medio fluido de densidad ρ y viscosidad μ con velocidad uniforme **V**?*

Ya que no es fácil reproducir el proceso a escala de laboratorio, lo que se hace en este tipo de problemas es invertir el movimiento, es decir: impulsar una corriente fluida uniforme sobre un cuerpo esférico estacionario, utilizando para ello un túnel de viento.



Si se supone que la fuerza de arrastre F depende de la densidad ρ y viscosidad μ del fluido; así como de la velocidad de la corriente V y del diámetro de la esfera D, se puede escribir la siguiente relación funcional,

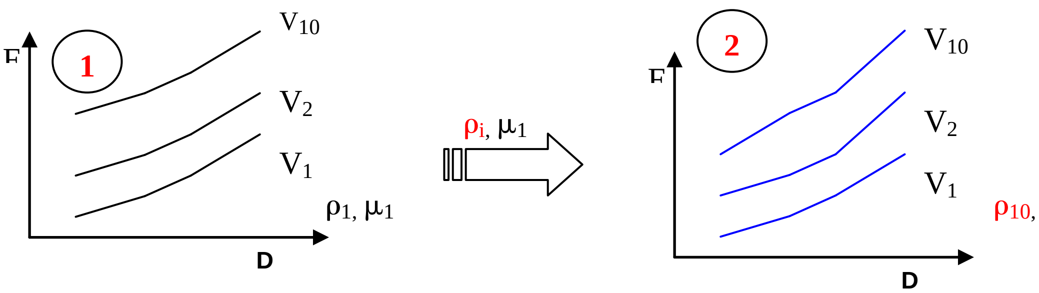
$$\mathbf{F = f(\rho,\mu,V,D)}$$

Entonces se trata, entonces, de determinar la relación funcional anterior experimentalmente.

Una forma de planificar el trabajo experimental puede ser la siguiente:

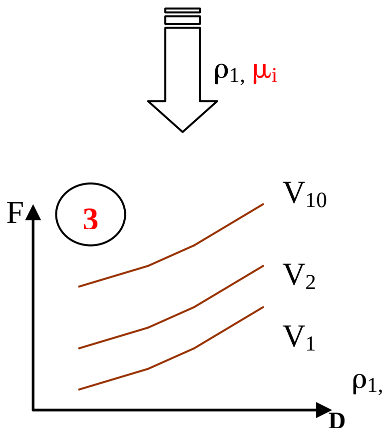
- Determinar la influencia de cada una de las cuatro variables en el valor de la fuerza de arrastre, manteniendo fijos los valores de las tres variables restantes.
- Repetir cada prueba cuando menos para 10 valores distintos de la variable independiente. Valor mínimo para fines de análisis estadístico.

El procedimiento anterior se puede explicar mejor con ayuda del siguiente gráfico,



No. de pruebas = 10x10

No. de pruebas = 10x10x10



No. Total de pruebas = 10x10x10x10

- Se necesita repetir la prueba para 10 diámetros diferentes.
- Para cada diámetro se necesita repetir la prueba para :

  10 valores distintos de la velocidad
  10 valores diferentes de la densidad y
  10 valores distintos de la viscosidad

Es decir que se deben realizar cuando menos 10^4 Pruebas experimentales.
A un costo de ¡solo 10 Bs.! por prueba…
Y realizando 10 pruebas por día….
Y si aumenta el número de variables implicadas, por ejemplo, la rugosidad de la esfera, se tendrían que realizar 10^5 pruebas y si …

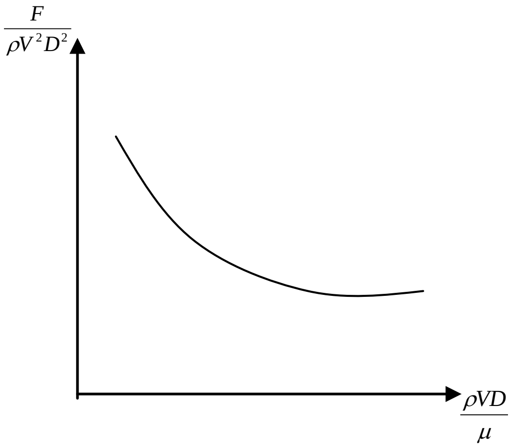
Conclusión: Esta forma de llevar adelante el trabajo experimental sería extremadamente LARGO Y COSTOSO.

Una buena alternativa es utilizar el análisis dimensional del las variables implicadas en el problema como paso previo a la planificación del experimento. Esta técnica, como ya se mencionó, permite agrupar las variables en parámetros adimensionales y formular el problema en términos de la relación funcional de estos grupos de variables. Asi, en este caso se tiene sólo dos parámetros adimensionales independientes, como se vera mas adelante, que son:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} \quad y \quad \frac{\rho V D}{\mu}$$

Entonces se puede escribir la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)}$$



La forma de la función f debe ser determinada experimentalmente. Este proceso experimental exige un número menor de pruebas al ser necesario solo una curva para explicar la naturaleza del proceso.
Para variar el parámetro independiente, es suficiente variar la velocidad de la corriente de fluido. Y basta utilizar un solo fluido por ejemplo el aire, y solo un tamaño de esfera.

4.4. El teorema de *Pi* de Buckingham

Existe un número de grupos adimensionales independientes fijo para un problema dado, y es, generalmente aunque no siempre, igual a la diferencia entre el número total de variables menos el número de dimensiones fundamentales. Esta forma de determinar el número de grupos adimensionales se conoce con el nombre de *teorema de pi*, y establece que:

El número de grupos adimensionales que se utilizan para describir una situación física real que involucre a n variables es igual a **n-j**, donde j es el número de dimensiones fundamentales.
Es decir:

$$\boxed{\mathbf{i = n - j}}$$

i = número de parámetros adimensionales independientes
n = número de variables implicadas en el problema
j = número de dimensiones fundamentales (rango de la matriz dimensional[1])

4.5. ¿Cómo agrupar las variables de proceso en grupos adimensionales?

Un conjunto básico de grupos Pi debe escogerse de tal manera que sean independientes. Pues aunque existe un número fijo de parámetros para cada problema, se pueden obtener otros mediante la combinación de los ya establecidos claro que, por ello mismo no son independientes.

[1] La matriz dimensional es la matriz formada al tabular los exponentes de las dimensiones de las variables implicadas en el problema objeto de estudio.

Método de Buckingham

Estos grupos se pueden obtener de varias maneras, se exponen aquí dos métodos para agrupar las variables en grupos adimensionales:

- Independientemente de método a utilizar es una buena práctica elaborar un listado de las variables significativas implicadas en el problema objeto de estudio, y su expresión dimensional equivalente.
- Luego es conveniente, aunque no imprescindible, determinar el número de parámetros adimensionales independientes en los que se pueden agrupar estas variables, utilizando el teorema de pi.
- En base a lo anterior se generan los grupos adimensionales utilizando cualquiera de los siguientes procedimientos.

  i. Método algebraico.
  ii. Método cociente dimensional.

En el siguiente ejemplo se explica la aplicación del procedimiento anterior.

Ejemplo 1
Determinar los grupos adimensionales formados con las variables involucradas en el flujo de un fluido sobre un cuerpo sólido de forma esférica. Se sabe que la fuerza ejercida sobre el cuerpo es una función de la velocidad media de flujo v, densidad del fluido ρ, viscosidad del fluido μ y diámetro del cuerpo esférico D.

Resolución

Lista de variables y sus dimensiones

No.	Variable	Símbolo	Dimensiones
1	Fuerza	F	$ML\theta^{-2}$
2	Velocidad	V	$L\theta^{-1}$
3	Densidad	ρ	ML^{-3}
4	Viscosidad	μ	$ML^{-1}\theta^{-1}$
5	Diámetro	D	L

Dimensiones fundamentales usadas en la definición dimensional de las variables del problema

No.	Dimensión	Símbolo
1	Longitud	L
2	Masa	M
3	Tiempo	θ

Número de grupos adimensionales independientes:

$$i = 5 - 3 = 2$$

a) Determinación algebraica

La variable objeto de estudio F, puede ser expresada como función exponecial de las cuatro restantes. Así:

$$F = K\rho^a\mu^bD^c\,v^d \tag{1}$$

Cuya expresión dimensional es:

$$ML\theta^{-2} \equiv \left(ML^{-3}\right)^a \left(ML^{-1}\theta^{-1}\right)^b L^c \left(L\theta^{-1}\right)^d \qquad (2)$$

agrupando exponentes de la misma base, en el segundo miembro:

$$ML\theta^{-2} \equiv \left(M^{a+b}\right)\left(L^{-3a-b+c+d}\right)\left(\theta^{-b-d}\right)$$

Igualando los exponentes de M, L y θ en ambos miembros de esta expresión se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

1 = a + b
1 = -3a - b + c + d
-2 = -b – d

Resolviendo para a,d,c, se tiene

a = 1 - b
d = 2 - b
c = 2 - b

sustituyendo estos valores en (1) y reagrupando:

$$F = K\rho^{1-b}\mu^b D^{2-b} V^{2-b}$$

$$F = K(\mu\rho^{-1} D^{-1} V^{-1})^b \rho D^2 V^2$$

$$\frac{F}{\rho D^2 V^2} = k\left(\frac{\mu}{\rho D V}\right)^b \qquad (3)$$

Los parámetros adimensionales se obtiene de esta última expresión:

$$\boxed{\pi_1 = \frac{F}{\rho D^2 V^2} \quad y \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho D V}}$$

Ejemplo 2

*Determinar los grupos adimensionales formados con las variables involucradas en el flujo viscoso incompresible de un fluido en el interior de un tubo horizontal. Se sabe que la caída de presión por efecto de la viscosidad, **Δp**, es función de la velocidad media de flujo **v**, densidad del fluido **ρ**, viscosidad del fluido **μ**, diámetro tubo **D**, longitud del tramo considerado del tubo **L**, y la rugosidad de la pared interna del tubo, **e**.*

Solución

Lista de variables implicadas en el proceso y sus dimensiones

No.	Variable	Símbolo	Dimensiones
1	Caída de presión	F	$ML^{-1}\theta^{-2}$
2	Velocidad	V	$L\theta^{-1}$
3	Densidad	ρ	ML^{-3}
4	Viscosidad	μ	$ML^{-1}\theta^{-1}$
5	Diámetro	D	L
6	Longitud	ℓ	L
7	Rugosidad	e	L

Dimensiones fundamentales usadas en la definición dimensional de las variables del problema

No.	Dimensión	Símbolo
1	Longitud	**L**
2	Masa	**M**
3	Tiempo	**θ**

Número de grupos adimensionales independientes:

i = 7 – 3 = 4

Variables del conjunto recurrente

No.	Variable	Símbolo	Dimensiones
2	Velocidad	V	**$L\theta^{-1}$**
3	Densidad	ρ	**ML^{-3}**
5	Diámetro	D	**L**

En base a las variables del conjunto anterior se pueden escribir las siguientes expresiones para las dimensiones fundamentales:

V	**$L\theta^{-1}$**	$\theta \equiv L/V = D/V$
ρ	**ML^{-3}**	$M \equiv \rho L^3 = \rho D^3$
D	**L**	$L \equiv D$

Ahora, tomando como base cada una de las variables que no se repiten y las equivalencias dimensionales de la última tabla, se forman los cuatro parámetros adimensionales. Así

Se divide cada variable entre su representación dimensional, así para la presión se tiene:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{ML^{-1}\theta^{-2}}$$

luego se sustituye las dimensiones básicas por sus equivalencias obtenidas.

$$\boxed{\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho D^3 D^{-1}(D/V)^{-2}} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}}$$

Para la viscosidad:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{ML^{-1}\theta^{-1}}$$

$$\boxed{\pi_2 = \frac{\mu}{\rho D^3 D^{-1}(D/V)^{-1}} = \frac{\mu}{\rho DV}}$$

Para la longitud L:

$$\pi_3 = \frac{l}{L} \qquad \boxed{\pi_3 = \frac{l}{D}}$$

Para la rugosidad e:

$$\pi_4 = \frac{e}{L} \qquad \boxed{\pi_4 = \frac{e}{D}}$$

El parámetro π_1, se puede escribir como función de los tres parámetros restantes:

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = F\left(\frac{\mu}{\rho D V}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

La función F() debe ser determinada experimentalmente. Sin embargo en este caso la experiencia muestra que la caída de presión es directamente proporcional a la relación l/D, entonces se puede escribir la siguiente relación:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{l}{D} f\left(\frac{\mu}{\rho D V}, \frac{e}{D}\right)$$

Esta última expresión puede ser transformada del siguiente modo:

$$\Delta p = \frac{\rho V^2}{2} \frac{l}{D} 2 f_1\left(\frac{\rho D V}{\mu}, \frac{e}{D}\right)$$

$$\Delta p = \frac{\rho V^2}{2} \frac{l}{D} f_2\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{D}\right)$$

Si se hace que:

$$f = f_2\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{D}\right)$$

Donde la función f_2, es conocida como coeficiente de fricción **f**, y cuyo valor debe ser determinado experimentalmente. Se obtiene así la conocida formula de ***Darcy*** para el calculo de la caída de presión por fricción.

$$\boxed{\Delta p = f \frac{\rho V^2}{2} \frac{l}{D}}$$

El procedimiento anterior se puede resumir en los siguientes pasos

1. Elaborar una lista de las variables influyentes implicadas en el problema, que incluya:
   Variable, símbolo, dimensión
2. Seleccionar y/o identificar el conjunto de dimensiones fundamentales que requiere el problema.
3. Elegir el conjunto de variables que se repiten (recurrente), cuyo número debe ser igual al de dimensiones fundamentales necesarias, e incluir todas las dimensiones fundamentales.
4. Establecer las ecuaciones dimensionales para las dimensiones fundamentales, a partir de las variables del conjunto recurrente y sus expresiones dimensionales equivalentes.

5 Obtener los grupos adimensionales tomando como base el cociente de las variables que no forman parte del conjunto recurrente entre sus dimensiones. Y combinando la expresión dimensional resultante con las expresiones dimensionales obtenidas en el paso 4.

6 Comprobar que efectivamente todos los grupos obtenidos son adimensionales.

4.6. Parámetros adimensionales importantes del flujo fluido.

En la mecánica de fluidos los parámetros adimensionales se definen exactamente y a cada uno de ellos se les da un nombre. Hay grupos adimensionales que se presentan en casi todos los problemas de flujo fluido y tienen significado físico, por lo que son ordinariamente estudiados para caracterizar el flujo.

Las siguientes variables son relevantes en los procesos de flujo fluido:

No.	Variable	Símbolo	Dimensión
1	Viscosidad	μ	$ML^{-1}\theta^{-1}$
2	Densidad	ρ	ML^{-3}
3	Tensión superficial	σ	$M\theta^{-2}$
4	Variación de la presión	Δp	$ML^{-1}\theta^{-2}$
5	Velocidad	**v**	$L\theta^{-1}$
6	Velocidad del sonido	**c**	$L\theta^{-1}$
7	Longitud	**L**	L
8	Aceleración de la gravedad	**g**	$L\theta^{-2}$

Tomando como base estas variables se forman los siguientes parámetros adimensionales, importantes en la mecánica de fluidos:

Grupo adimensional	Designación	Expresión
Número de Reynolds	***Re***	$\frac{\rho VL}{\mu}$
Número de Froude	***Fr***	$\frac{V^2}{Lg}$
Número de Euler	***Eu***	$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$
Número de Mach	***M***	$\frac{V}{c}$
Número de Weber	***We***	$\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$

5.6.1 Significado físico de los parámetros adimensionales

Como ya se mencionó, los parámetros adimensionales, importantes de la mecánica de los fluidos tienen significado físico:

La expresión y el significado físico de cada uno de los anteriores parámetros son los siguientes:

(se deja para el estudiante desarrollar este acápite)

4.7. Similitud

En el diseño y prueba de equipos relacionados con el flujo de fluidos se suele construir modelos a escala de laboratorio, geométricamente similares a los prototipos. Los datos experimentales obtenidos con estos modelos se aplican al diseño de los prototipos de tamaño real en función de requisitos de similaridad geométrica, cinemática y dinámica.
Consideremos cualquier problema de flujo fluido, por ejemplo, el flujo sobre un objeto esférico. Las propiedades y configuración del flujo están determinadas por la forma geométrica del objeto y las propiedades pertinentes del fluido. Se dice entonces que dos flujos son similares si son geométricamente similares y si todos los parámetros adimensionales correspondientes son los mismos para los dos flujos.

Consideremos ahora un modelo y un prototipo. ¿Cómo podemos relacionar las medidas hechas en el modelo con el prototipo? La respuesta es: haciendo que sean geométricamente semejantes y que los parámetros adimensionales sean los mismos.

El significado de flujo semejante y correlación entre modelo y prototipo se puede entender considerando la forma adimensional de las ecuaciones gobernantes. Es claro que si todas las ecuaciones diferenciales correspondientes se hacen adimensionales, el tamaño del objeto no entra en consideración si la forma es geométricamente semejante. Sin embargo los parámetros adimensionales deben ser necesariamente iguales en ambos casos.

Estos parámetros dependen de las propiedades del fluido y de una dimensión física característica del objeto. Por tanto, las ecuaciones diferenciales descritas son idénticas para el modelo y prototipo. Se pueden hacer entonces medidas de cualquier variable adimensional del modelo y esta tendrá el mismo valor para el prototipo y al convertir a la forma dimensional los datos tomados en el modelo pueden ser relacionados directamente con el prototipo.

Se puede decir entonces: dos flujos son similares si los parámetros y variables adimensionales son los mismos sin importar el tamaño de la configuración geométrica del flujo, si se mantiene una semejanza geométrica.

El estudiante se encargará de desarrollar los siguientes aspectos:

- Semejanza geométrica
- Semejanza cinemática
- Semejanza dinámica
- Relación entre análisis dimensional y similitud
- Obtención de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales del flujo fluido.

Bibliografía

Shames H. Irving , La Mecánica de los Fluidos, McGraw-Hill.
White M. Frank, Mecánica de Fluidos, McGraw-Hill.
Fox Robert, Introducción a la Mecánica de los Fluidos, McGraw-Hill
Hughes William, Dinámica de Fluidos, McGraw-Hill