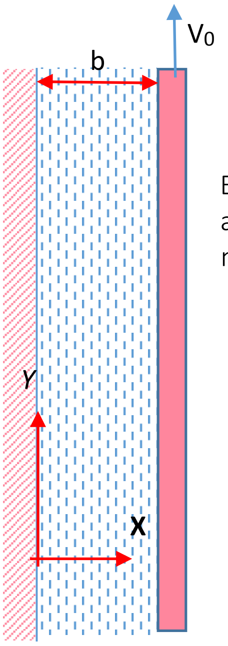
Ejemplo 1. Flujo laminar e incompresible de un fluido Newtoniano entre dos placas paralelas verticales.

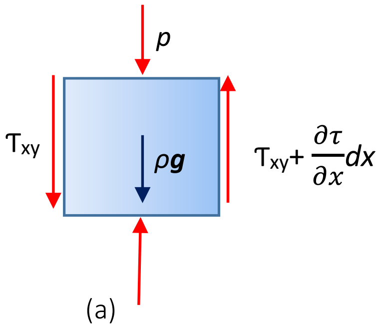
En la figura se muestra una situación de un fluido incompresible confinado entre dos placas paralelas verticales. Una de las placas, la del lado izquierdo, esta fija, mientras que la otra se está moviendo hacia arriba con una velocidad constante V_0. Suponiendo un fluido Newtoniano y flujo laminar.



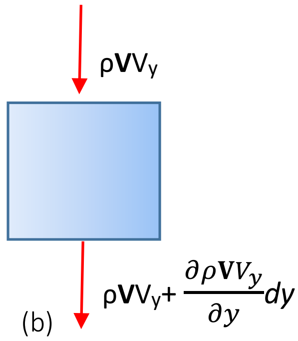
La ecuación que gobierna el movimiento es la ecuación de cantidad de movimiento, cuya expresión general está dada por:

$$\rho \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\nabla} p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau_{ij}} = \rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} \qquad (1)$$

En las figuras (a) y (b) se muestran: las fuerzas másicas y superficiales que actúan sobre el volumen de control diferencial y el flujo de cantidad de movimiento a través de la superficie de volumen de control, respectivamente.



(a)



(b)

Asumiendo flujo permanente; $\rho \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = 0$, tenemos que,

$$\rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \rho \left(\cancelto{0}{\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} \right) = \rho(\boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V})\text{n}$$

Luego la ecuación (1) toma la forma:

$$\rho \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\nabla} p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau_{ij}} = \rho(\boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V}) \qquad (1a)$$

Asumiendo ancho infinito para las placas podemos despreciar los efectos de borde, por lo que el fluido no se mueve en la dirección z, es decir $V_z = 0$

Como las dos placas verticales son paralelas y una de las placas se mueve hacia arriba paralelamente a la otra placa con velocidad constante en la misma dirección de la acción gravitacional sobre el fluido, asumimos que las partículas fluidas se mueven paralelamente a las placas y la velocidad varía solo en función de **x** (por efecto de la viscosidad) y es independiente de y. Entonces el movimiento tiene que ser únicamente vertical, V_y = $V_y(x)$ y $V_x = 0$. Dicho de otro modo la velocidad solo tiene componente vertical y es sólo función de x.

Bajo estas consideraciones los términos de la ecuación (1a), en coordenadas cartesianas tienen la siguiente forma:

$$\rho \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\rho} g \underset{\boldsymbol{j}}{\rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial y} \underset{\boldsymbol{j}}{\rightarrow},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau_{ij}} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \underset{\boldsymbol{j}}{\rightarrow}$$

$$\rho(\boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V}) = \rho \left(V_y \cancelto{0}{\frac{\partial V_y}{\partial y}} \right) \underset{\boldsymbol{j}}{\rightarrow} = 0 \qquad \text{ya que } V_y \text{ solo es función de x}$$

La ecuación (1a) toma la forma,

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

Como el fluido es Newtoniano, tenemos que según la ley de Newton de la viscosidad,

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \frac{\partial V_y}{\partial x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\Delta p}{\Delta y}$.-La caída de presión por unidad de longitud, se asume constante.

Finalmente, la ecuación de movimiento resulta, ecuación diferencial que debemos resolver:

$$\mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = \rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y} \qquad (5)$$

Esta ecuación diferencial es separable. La primera integración da el siguiente resultado:

$$\mu \int d\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right) = \int \left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right) dx$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{x}{\mu}\left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right) + C_1$$

Integrando por segunda vez tenemos,

$$\int dV_y = \int \left[\frac{x}{\mu}\left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right) + C_1\right] dx$$

$$V_y = \frac{x^2}{\mu}\left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right) + xC_1 + C_2$$

Ahora evaluamos las constantes de integración usando las condiciones a la frontera:

Para X=0; V_y=0 → $C_2 = 0$

Para X=b; $V_y = V_0$ → $C_1 = \frac{V_0}{b} - \frac{b}{2\mu}\left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right)$

Entonces el perfil de la velocidad se puede expresar así:

$$V_y = \frac{x^2}{\mu}\left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right) + x\left[\frac{v_0}{b} - \frac{b}{2\mu}\left(\rho g + \frac{\Delta p}{\Delta y}\right)\right] \qquad (6)$$

Figura 2.-Perfil de velocidad correspondiente a un fluido que se mueve entre dos placas paralelas verticales, tal que una de las placas se mueve en forma ascendente von velocidad constante, dado por la ecuación (6).

¿Cómo cambia este perfil si la placa se mueve hacia abajo? Y ¿si no se mueve, V_0=0?