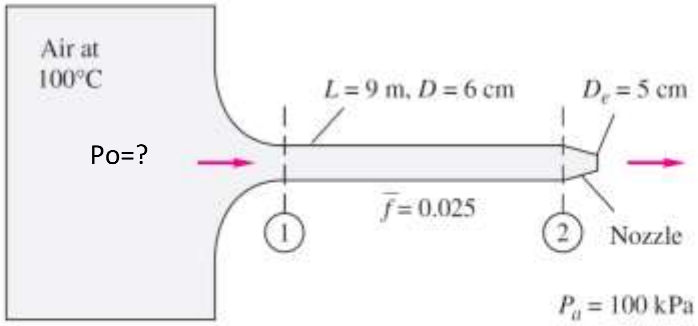
Problem. Air flows steadily from a tank through the pipe in figure. There is a converging nozzle on the end. If the mass flow is 3 kg/s and the nozzle is choked, estimate (a) the Mach number at section 1 and (b) the pressure inside the tank.



RESOLUCIÓN

ANÁLISIS

Para calcular tanto el número Mach M_1, como la presión en el tanque es necesario calcular previamente el número de Mach M_2 y cuando menos la temperatura T_2 y presión p_2, como se explicó en la clase. Con estos dos datos y usando la ecuación

$$\frac{\bar{f}L^*}{D} = \frac{1 - Ma^2}{k\,Ma^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)Ma^2}{2+(k-1)Ma^2} \qquad (1)$$

Calculamos L_{max1}, tomando como origen la sección 2. Para luego calcular M_1, con la misma ecuación timando, ahora, como origen la sección 1 y con $L_{max2} = L_{max1} + L$. en ambos caso el factor de fricción y el diámetro del ducto mantienen su valor (0.025 y 0.06m respectivamente).

El número de Mach M2 y los demás parámetros termodinámicos de la sección 2, se deben calcular en base a las condiciones termodinámicas a la salida de la tobera, puesto que la sección 2 (salida del tubo) es la sección de entrada de la tobera. Para ello se deben usar las relaciones termodinámicas y de flujo isotrópico. Según se menciona en el enunciado las condiciones de flujo en la salida de la tobera que descarga a la atmosfera son las criticas Ms=1 (flujo bloqueado).

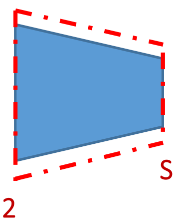
La presión en el tanque es igual a la presión de estancamiento en la sección 1, entrada del ducto y salida de la tobera del tanque.

Como el flujo es adiabático en todo el trayecto (conducto y toberas), la temperatura de estancamiento es constante a lo largo del ducto. $T_{O1} = T_{O2} = T_{Os} = T_O$ = cte. (100 ^OC)

A la salida la presión p_s puede ser p_a o la p^*, esto está en función del valor de la relación entre p_0, p^* y p_a.

OPERACIONES

Tobera:



$M_s = 1$; $V_s = V^* = C_s = \sqrt{kRT^*}$
$T_s = T^*$
$P_s = p_b = p_a$

Calculamos las condiciones termodinámicas a la salida

Temperatura crítica:

$$T^* = \frac{T_{0s}}{1 + \frac{k-1}{2}} = \frac{373}{1 + \frac{1.4-1}{2}} = 310.8\,K$$

Velocidad crítica (Salida)

$V^* = C_s = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 310.8} = 353.38\ m/s$

Densidad del aire a la salida de la tobera.

$$\rho_s = \frac{m}{A_s \cdot V_s} = \frac{3}{\pi \cdot 0.025^2 * 353{,}38} = 4{,}234\ kg/m^3$$

Presión critica

$$p^* = \rho^* RT^* = 4{,}234 * 0{,}287 * 310.8 = 377{,}67\ kPa$$

Como $p^* > p_a$ → $p_s = p^* = 377{,}67$ kPa

Presión de estancamiento

$$p_{os} = p_s\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 377{,}67\left(1 + \frac{1.4-1}{2}\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 714{,}90\ kPa$$

Calculamos ahora las condiciones termodinámicas a la entrada de la tobera
Para esto usamos las ecuaciones fundamentales de flujo, para flujo permanente e isentropico en la tobera;

Presión y temperatura de estancamiento
Como el flujo en la tobera se considera isentrópico la presión de estancamiento al igual que la temperatura de estancamiento son constantes a lo largo de la tobera, decir que

$p_{02} = p_{0S} = 714.90$ kPa y $T_{02} = T_{os} = 373$ K

Temperatura y presión estáticas
La temperatura y presión a la entrada de la tobera en función de las condiciones de estancamiento y el número de Mach, están dadas por

$$\boldsymbol{T_2 = \frac{T_{o2}}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)} = \frac{373}{(1+0.2M_2^2)};\qquad p_2 = \frac{p_{o2}}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{714{,}9*10^3}{(1+0.2M_2^2)^{3.5}}} \quad (2)$$

Numero de Mach M_2.-
De la ecuación de continuidad → $m_2 = m_s = 3$ kg/s = cte.
Entonces podemos escribir para la entrada a la tobera:

$$\boldsymbol{\rho_2 V_2 A_2 = 3}$$

De donde;

$$\frac{3}{A_2} = \rho_2 V_2 = \rho_2 M_2\sqrt{kRT_2} = \frac{p_2}{RT_2} M_2\sqrt{kRT_2} = p_2 M_2\sqrt{\frac{k}{RT_2}} \quad (3)$$

Combinado (3) con las ecuaciones (2), sustituyendo valores numéricos y operando, se tiene la siguiente ecuación para M_2

$$\frac{3}{\pi \cdot 0.03^2} = \frac{714{,}9 * 10^3}{(1+0.2M_2^2)^{3.5}} M_2\sqrt{\frac{k}{R}\frac{(1+0.2M_2^2)}{373}}$$

$$= 714{,}90 * 10^3 * \sqrt{\frac{1.4}{287}\frac{1}{373}} M_2(1+0.2M_2^2)^{-3}$$

$$M_2 = 0{,}410(1+0.2M_2^2)^3 \quad (3a)$$

Mediante una solución numérica de la ecuación (3a) → $M_2 \approx 0,46$

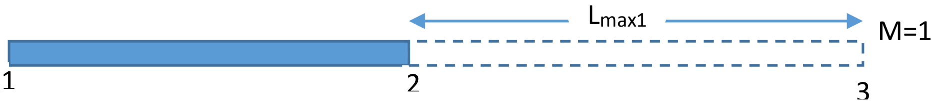
Una vez calculado el valor de M_2, podemos calcular T_2, y p_2 con las ecuaciones (1).

$$\boldsymbol{T_2 = \frac{373}{(1+0.2M_2^2)} = \frac{373}{(1+0.2\cdot 0,46^2)} = 358\ K}$$

$$\boldsymbol{p_2 = \frac{714,9}{(1+0.2M_2^2)^{3.5}} = \frac{714,9}{(1+0.2\cdot 0,46^2)^{3.5}} = 618\ kPa}$$

Con los datos calculados de M_2, p_2 y T_2, podemos considerar ahora el conducto recto, para calcular M_1, p_{01} (presión de estancamiento a la entrada de la tobera y por tanto igual a la presión en el tanque), tal como lo planificado, líneas arriba.

Cálculo de Lmax1

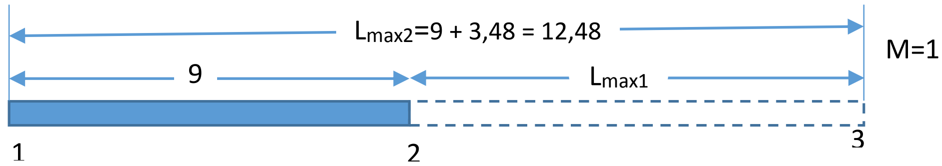


Aplicando la ecuación 1, entre las secciones 2 y 3 del conducto, se tiene

$$\frac{0,025\cdot L_{max1}}{0,06} = \frac{1-0,46^2}{1.4\cdot 0,46^2} + \frac{1.4+1}{2*1.4} ln\left[\frac{(1.4+1)\cdot 0,46^2}{2+(1.4-1)\cdot 0,46^2}\right]$$

L_{max1}= 1.4509*0,06/0.025 = 3,48 m

Cálculo de M_1



Aplicamos nuevamente, la formula (1), pero ahora entre las secciones 1 y 3, del conducto recto, y dela relación resultante despejamos M_1,

$$\frac{0,025\cdot 12,48}{0,06} = \frac{1-M_1^2}{1.4\cdot M_1^2} + \frac{1.4+1}{2*1.4} ln\left[\frac{(1.4+1)\cdot M_1^2}{2+(1.4-1)\cdot M_1^2}\right]$$

$$5,2 = \frac{1-M_1^2}{1.4\cdot M_1^2} + 0,857 ln\left[\frac{2,4\cdot M_1^2}{2+0,4\cdot M_1^2}\right] \qquad (4)$$

$M_1 = 0,3023 \approx 0,30$ (sol aprox., usando un método numérico)

Presión en el interior del tanque

Como ya mencionamos, la presión en el interior del tanque es igual a la presión de estancamiento a la salida de la boquilla del mismo que es a su vez la entrada al ducto (sección 1 del ducto), esto debido a que este flujo, en la boquilla del tanque, puede considerarse isentrópico, por lo que p_0= p_{01}.

Para esto, calculamos previamente p1, podemos hacerlo usando la ecuación del gas ideal,

$$p_1 = \rho_1 R T_1$$

Donde, ve que es necesario calcular previamente T_1 y ρ_1, la temperatura T1 se puede calcular usando la relación entre temperaturas de estancamiento y estática. Asi,

$$T_1 = \frac{T_{o1}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)} = \frac{373}{(1 + 0.2 \cdot 0,3^2)} = 366,4\ K$$

En cambio para la densidad ρ_1, cambiamos de estrategia, la calculamos a partir de la ecuación de continuidad (en la que no interviene la fricción), pues al no conocer la densidad de estancamiento no es posible usar la relación matemática entre las densidades de estancamiento y estática como en el caso de la temperatura.,

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Combinamos esta ecuación con relaciones conocidas entre la velocidad, velocidad del sonido y el número de Mach, para obtener:

$$\rho_1 = \rho_2 \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_2}{R \cdot T_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) = \left(\frac{618}{0.287 \cdot 358}\right)\left(\frac{0,46}{0,30}\sqrt{\frac{358}{366,4}}\right) = 91,2\,\frac{kg}{m^3}$$

$$p_1 = 9{,}12 * 0{,}287 * 366{,}4 = 959{,}0\ kPa$$

Presión de estancamiento.

Con M1 y p1, se puede calcular la presión de estancamiento en la sección 1, usand loa relación de presiones estática y de estancamiento,

$$p_{01} = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 959\left(1 + \frac{1.4-1}{2} 0,3^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 1021\ kPa$$

Entonces, como ya se mencionó, la presión en el tanque es:

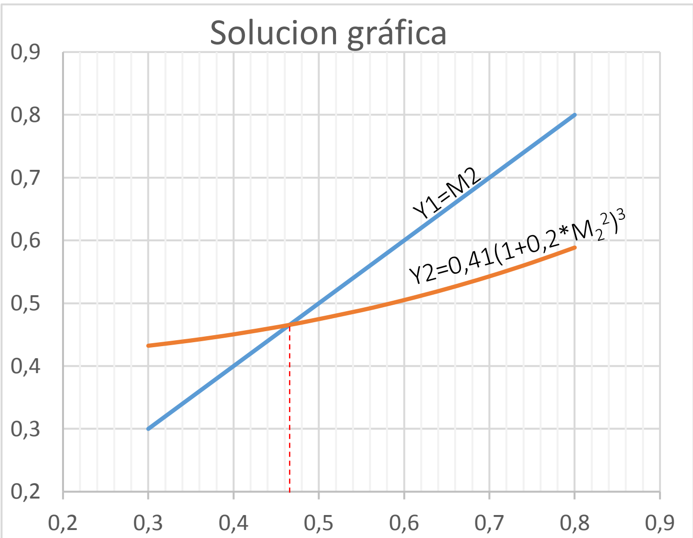
$$p_0 = p_{01} = 1021,0\ kPa$$

ANEXO

Solución gráfica y por el método de las aproximaciones sucesivas de la ecuación (3a)

$$M_2 = 0{,}410(1 + 0.2M_2^2)^3$$

Grafica que muestra la intersección



Numero de Mach M_2

APROXIMACIONES SUCESIVAS

Ma	Mc	lMcMal/Ma
0,3	0,433	44,18%
0,433	0,458	5,84%
0,458	0,464	1,31%
0,464	0,465	0,32%
0,465	0,466	0,08%
0,466	0,466	0,02%

Se asume M2 ≈ 0,46 (error ≈1.3 %)