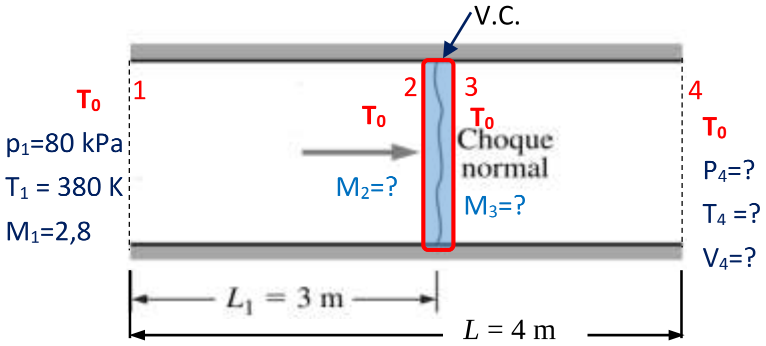
Problema. Entra aire a un ducto adiabático de 5 cm de diámetro y 4 m de longitud a $M_1 = 2.8$, $T_1=380$ K y $P_1 = 80$ kPa. Se observa que ocurre un choque normal a una distancia de 3 m de la entrada. Tome el factor de fricción promedio como 0.007 y determine: velocidad, temperatura y presión a la salida del ducto.

RESOLUCIÓN

Análisis e interpretación del problema.

En el grafico se sintetizan las características del, los datos disponibles, los datos a calcular y el volumen de control a considerar para analizar el efecto de la onda de choque en el flujo.



En este problema, es necesario considerar tres zonas (volúmenes de control) antes del choque entre las secciones de flujo 1-2; choque sección 2-3 y después del choque 3-4. El propósito es determinar las variables termodinámicas (particularmente el número de Mach) después del choque para en base a estos datos calcular las condiciones termodinámicas en la salida del ducto, teniendo en cuenta además que el flujo es adiabático en las tres zonas y por tanto la temperatura de estancamiento es constante, T_0, a lo largo del conducto. Para esto planteamos las siguientes hipótesis (de la lectura del enunciado del problema).

i) Flujo permanente

ii) Flujo adiabático con fricción (excepto en la zona de choque donde supondremos flujo adiabático sin fricción, pero irreversible debido al choque). $T_{01} = T_{02} = T_{03} = T_0 =$

iii) Calores específicos constantes.

Aplicamos entonces la siguiente estrategia:

1 *Con M_1, calculamos Lmax1. Correspondiente a $M^*=1$, usando la siguiente relación y tomando como origen la sección 1.*

$$\frac{f \cdot L_{max}}{D} = \frac{1 - M^2}{k \cdot M^2} + \frac{k+1}{2k} ln\left[\frac{(k+1) \cdot M^2}{2 + (k-1) \cdot M^2}\right] \quad (1)$$

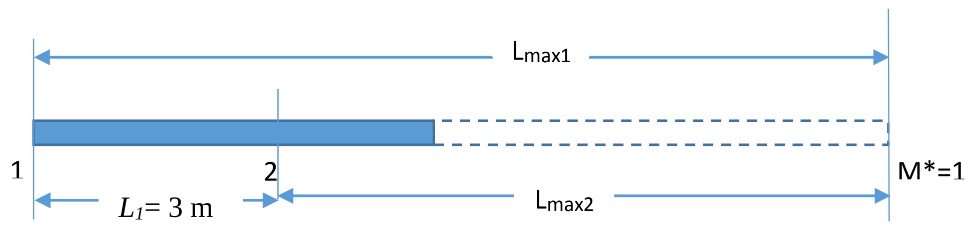


Figura 2.

Luego calculamos M_2 con la misma ecuación tomando, ahora, como origen la sección 2 (antes del choque) y con $L_{max2} = L_{max1} - L_1$. en ambos caso el factor de fricción y el diámetro del ducto mantienen su valor (0.007 y 0.05m respectivamente).

2 *Con los datos de M_2 y To (antes del choque) calculados en la sección anterior, calculamos M_3 después del choque. Usando las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.*

$$\boldsymbol{\rho_2 V_2 A = \quad \rho_3 V_3 A = m} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{p_2 - p_3 = \quad \rho_2 V_3^2 - \rho_1 V_2^2} \qquad (3)$$

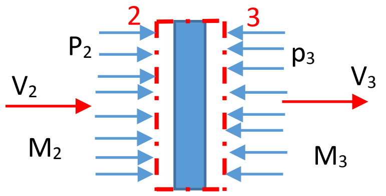


Figura 3

3 Con M_3, conocido, usando la ecuación (1) determinamos una nueva longitud para el estrangulamiento Lmax3, (considerando la zona después del choque, debido a la irreversibilidad del choque que altera fuertemente las condiciones de flujo) tomando como origen la sección 3 (después del choque), Luego tomando como origen la sección 4 (salida del ducto) como origen, usando nuevamente la ecuación (1) calculamos M_4. Con este dato, M_4, y T_0, calculamos el resto de los parámetros termodinámicos a la salida del tubo.

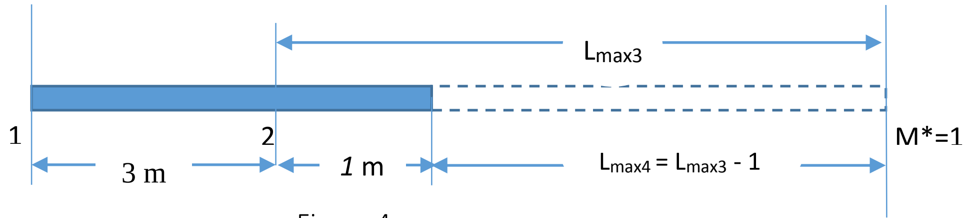


Figura 4

OPERACIONES

Datos obtenidos de tablas para el aire estándar

k = 1.4; R = 287 J/kgK

Temperatura de estancamiento T_0

$$T_0 = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 380\left(1 + \frac{1.4-1}{2}2.8^2\right) = 976\ K$$

1 Antes del choque

Lmax1:

$$\frac{0{,}007 \cdot L_{max1}}{0{,}05} = \frac{1 - 2.8^2}{1.4 \cdot 2.8^2} + \frac{1.4+1}{2 * 1.4} ln\left[\frac{(1.4+1)\cdot 2.8^2}{2 + (1.4-1)\cdot 2.8^2}\right]$$

L_{max1}= 0.4898x0,05/0.007 ≈ 3.50 m

M_2 con L_{max2} y la ecuación (1)

Lmax2 = Lmax1 – 3 = 3.50 – 3 = 0.50 m

$$\frac{f \cdot L_{max2}}{D} = \frac{1 - M_2^2}{k \cdot M_2^2} + \frac{k+1}{2k} ln\left[\frac{(k+1)\cdot M_2^2}{2 + (k-1)\cdot M_2^2}\right]$$

$$\frac{0.007 \cdot 0.50}{0.05} = \frac{1 - M_2^2}{1.4 \cdot M_2^2} + \frac{1.4+1}{2 \cdot 1.4} ln\left[\frac{(1.4+1)\cdot M_2^2}{2 + (1.4-1)\cdot M_2^2}\right]$$

$$0{,}07 = \frac{1 - M_2^2}{1{,}4 \cdot M_2^2} + 0.857 ln\left[\frac{2.4 \cdot M_2^2}{2 + 0{,}4 \cdot M_2^2}\right] \Rightarrow M_2 \approx 1{,}32$$

2 Cálculo de M_3 (después del choque)

De las ecuaciones (2) y (3) –continuidad y cantidad de movimiento) para el VC de la figura 3, se tiene:

$$\rho_3 V_3 = \rho_2 V_2 \qquad (2)$$

$$p_2 - p_3 = \rho_3 V_3^2 - \rho_2 V_2^2 \qquad (3)$$

$$V_3 = M_3\sqrt{kRT_3} = M_3\sqrt{k\frac{p_3}{\rho_3}} \qquad (4)$$

$$p_3 = \rho_3 R T_3 \qquad (5)$$

$$T_{03} = T_3\left(1 + \frac{k-1}{2}M_3^2\right) \qquad (6)$$

Resolviendo el sistema para M_3, combinando adecuadamente las ecuaciones, se tiene

$$M_3 = \sqrt{\frac{(k-1)M_2^2 + 2}{2kM_2^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{(1.4-1)1.32^2 + 2}{2\cdot 1.4\cdot 1.32^2 - 1.4 + 1}} = 0.775997$$

$M_3 \approx 0.776$

3. sección posterior a la onda de choque.

L_{max3}

$$\frac{0{,}007\cdot L_{max3}}{0{,}05} = \frac{1-0{,}776^2}{1.4\cdot 0{,}776^2} + \frac{1.4+1}{2*1.4}ln\left[\frac{(1.4+1)\cdot 0{,}776^2}{2+(1.4-1)\cdot 0{,}776^2}\right]$$

$L_{max3} \approx 0.65$ m

M_4

Nótese que al ser Lmax3 < 1m el flujo se estrangula antes de la salida del ducto (0,65 m después de la onda de choque), en consecuencia el número de Mach permanece constante e igual a 1 hasta la salida, es decir

$M_4 = 1$

y en consecuencia $T4 = T^*$; $p4 = p^*$; $V4 = V^* = c^*$

T_4

$$T_4 = T^* = \frac{T_{04}}{\left(1+\frac{k-1}{2}M_4^2\right)} = \frac{976}{\left(1+\frac{1.4-1}{2}\right)} \cong 813\ K$$

V_4 de la definición de numero de Mach, y velocidad del sonido, tenemos.

$$V_4 = M_4 C_4 = 1\cdot\sqrt{kRT_4} = \sqrt{1.4\cdot 287\cdot 813} = 571{,}7\ m/s$$

ρ_4 con la ecuación de continuidad para flujo permanente m=cte.

$$\rho_4 V_4 A_4 = m = 1.576\frac{kg}{s} \;\Rightarrow\; \rho_4 = \frac{1.576}{571.7\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0.05^2\right)} \cong 1.404\ kg/m^3$$

p_4 la presión se puede calcular con la ecuación del gas ideal,

$$p_4 = \rho_4 R T_4 = 1{,}404\cdot 287\cdot 813 \cong 327{,}6\ kPa$$