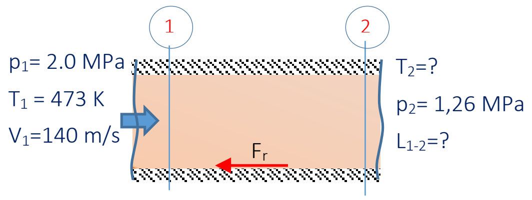
Problema.- Fluye aire en un ducto aislado. En una sección, la temperatura, la presión absoluta y la velocidad son 200 °C, 2.00 MPa y 140 m/s. Encuentre la temperatura en este ducto donde la presión ha disminuido a 1,26 MPa (abs) como resultado de la fricción. Si el ducto (e/D=0,0003) tiene 150 mm de diámetro, encuentre la distancia entre las dos secciones.

Análisis del problema



Para el aire: R= 287 J/kg.K; k =1,4

Hipótesis:

i) Flujo permanente
ii) Flujo adiabático con fricción
iii) Gas ideal

Ecuaciones fundamentales de flujo.- para las hipótesis planteadas las ecuaciones de flujo se pueden escribir así;

Ecuación de continuidad:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \qquad (1)$$

Primera ley de la termodinámica:

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_0 \quad \rightarrow \quad T_{01} = T_{02} \qquad (2)$$

Ecuación del gas ideal

$$p = \rho R T \qquad (3)$$

Cálculo de la temperatura T_2

Número de Mach en la sección 1.

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{140}{\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 473}} = 0{,}32$$

Temperatura de estancamiento: Como el flujo es adiabático $T_{02} = T_{01} = T_0$ =cte.

$$T_{01} = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 473\left(1 + \frac{1.4-1}{2}0{,}36^2\right) = 482{,}8K$$

De la ecuación de continuidad (1), se puede escribir:

$$\frac{\rho_1}{\rho 2} = \frac{V2}{V_1} = \frac{M2}{M1}\sqrt{\frac{T2}{T1}} \qquad (5)$$

Combinando (5) con la ecuación del gas ideal, escribimos

$$\frac{\rho_1}{\rho 2} = \frac{\frac{p_1}{T_1}}{\frac{p_2}{T_2}} = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \qquad (6)$$

A partir de la ecuación de energía y de la relación de temperaturas estática y de estancamiento se puede escribir la siguiente relación:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)} \qquad (7)$$

Combinando (6) y (7), y despejando M_2 resulta

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)}} \quad \Rightarrow \quad M_2 = \frac{p_1}{p_2}M1\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)}} \qquad (8)$$

Reemplazando valores y resolviendo la ecuación, obtenemos el valor de M_2

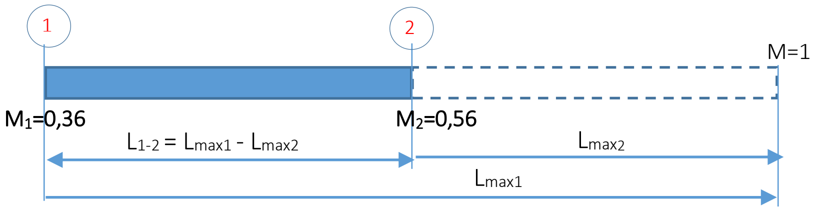
$$M_2 = \frac{2}{1{,}26}0{,}32\sqrt{\frac{(1 + 0{,}2 * 0{,}32^2)}{(1 + 0{,}2M_2^2)}}$$

$$M_2 = \frac{0{,}513}{\sqrt{(1 + 0{,}2M_2^2)}} \quad \xrightarrow{resolviendo} \quad M_2 \approx 0{,}51$$

Con T_0 y M_2 calculamos T2ddddr5

$$T_2 = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M_2^2\right)} = \frac{482{,}8}{(1 + 0{,}2 * 0{,}50^2)} = 460\ K$$

Calculo de la longitud del tubo entre las secciones 1 y 2.



Mediante la ecuación

$$\frac{1-M^2}{kM^2}+\frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{(k+1)M^2}{2+(k-1)M^2}\right]=\bar{f}\,\frac{L_{max}}{D_h} \qquad (9)$$

calculamos las longitudes Lmax1 y Lmax2, medidas desde la sección 1 y la sección 2 respectivamente y la diferencia de estos dos valores nos dará la longitud buscada L_{1-2}.

Factor de fricción f

Numero de Reynolds.

$$R_e = \frac{vD}{\nu}$$

Viscosidad cinemática (para temperatura media 206.5 °C) $\nu = 3{,}46*10^{-5}\ m^2/s$

$$R_e = \frac{140 * 0{,}15}{3{,}46\cdot 10^{-5}} = 6{,}07 * 10^5$$

Par e/D= 0,0003 y Re=$6*10^5$, del diagrama de Moody se obtiene f≈0,0165

Para M_1=0,32 de la ecuación (9), se tiene

$$4{,}447=\bar{f}\,\frac{L_{max\,1}}{D_h} \dashrightarrow \; L_{max1} = 4{,}447 * \frac{0{,}15}{0{,}0165} = 40.43\ m$$

Con M_2=0,50 según la ecuación se obtiene Lmax2

$$1{,}069=\bar{f}\,\frac{L_{max\,2}}{D_h} \dashrightarrow \; L_{max2} = 1{,}069 * \frac{0{,}15}{0{,}0165} = 9{,}72m$$

De donde:

$L = L_{max2}-L_{max1}$ = 40,43- 9,72=30,71 m