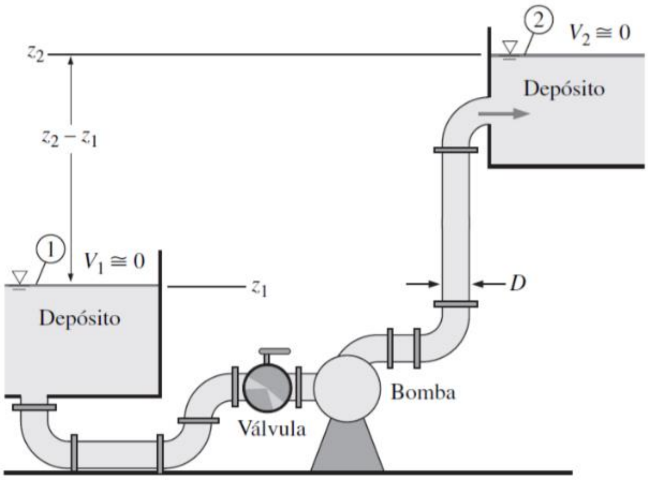
PROBLEMA.- Se emplea una bomba para llevar agua de un gran depósito a otro que está a mayor altura. Las superficies libres de ambos depósitos están expuestas a la presión atmosférica, como se ilustra en la figura. El desempeño de la bomba se aproxima por medio de la expresión $\mathbf{H_{disponible} = H_0 - aQ^2}$, donde la carga al cierre es H_0 = 24.4 m de columna de agua, el coeficiente es a = 0.0678 m/(Lpm)^2, la carga hidrostática disponible de la bomba $H_{disponible}$ está en unidades de metros de columna de agua y la capacidad Q está en litros por minuto (Lpm). Estime la capacidad de descarga de la bomba. Las dimensiones de la tubería y los coeficientes de pérdidas en accesorios son:



$z_2 - z_1$ = 7.85 m (diferencia de elevación)
D = 2.03 cm (diámetro interno de tubería)
k_1, entrada = 0.50 (entrada de la tubería)
k_2, válvula = 17.5 (válvula)
k_3, codo = 0.92 (cada codo, hay 5)
k_4, salida = 1.05 (salida de tubería)
L = 176.5 m (largo total de la tubería)
e = 0.25 mm (rugosidad media de la tubería)

RESOLUCION:

Discusión: Se trata de un típico problema de determinación del caudal máximo que puede transportar por una tubería, cuando se conocen las características del sistema de tubería y la curva de desempeño de la bomba. En estos casos debemos determinar la ecuación de la curva del sistema a partir de la ecuación generalizada de Bernoulli (obtenida a partir de la primera ley de la termodinámica para este tipo de sistemas de tubería), que nos permitirá calcular la carga hidrostática necesaria (requerida) $H_{necesaria}$, en función del caudal. Al igualar carga $H_{necesaria} = H_{disponible}$, obtenemos el caudal Q en el punto de operación.

Cálculo:

Ecuación generalizada de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 (niveles de los tanques)

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + Z_1 + H_{necesario} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + Z_2 + H_p \qquad (1)$$

Al tratarse de tanques grandes y abiertos a la atmosfera: $V_1 = V_2 = 0$; $p_1 = p_2$ = presión atmosférica, entonces la ecuación 1 se reduce a,

$$H_{necesario} = Z_2 - Z_1 + H_p = 7.85 + H_p \qquad (1a)$$

La perdidas de carga totales Hp, debido a las irreversibilidades calculan a partir de la conocida ecuación,

$$H_p = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} + \left(\sum_1^8 k_i\right)\frac{V^2}{2g} = \left(f\frac{L}{D} + \sum_1^8 k_i\right)\frac{V^2}{2g} \qquad (2)$$

Recordando que Q=VA y reemplazando datos numéricos, se obtiene,

$$H_p = \left(f\frac{176.5}{0.0203} + (0.5 + 17.5 + 5(0.92) + 1.05)\right)\frac{\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2}{2g}$$

$$H_p = (8694.58f + 23{,}65)487057.25Q^2$$

Transformando para Q (Lpm)

$$H_p = (1.176f + 0.0032)Q^2 \qquad (2a)$$

Finalmente de (1a) y (2a)

$$H_{necesaria} = 7.85 + (1.176f + 0.0032)Q^2 \qquad (3)$$

Luego como $H_{necesaria} = H_{disponible}$

$$7.85 + (1.176f + 0.0032)Q^2 = 24.4 - 0.0678Q^2$$

$$Q = \sqrt{\frac{16.55}{1.176f + 0{,}071}} \qquad (4)$$

El factor de fricción se puede calcular a partir de la ecuación de Colebrook (o del diagrama de Moody) con el número de Reynolds y el factor de rugosidad ξ=e/D, bajo la hipótesis de flujo turbulento.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (5)$$

Numero de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho D V}{\mu} = \frac{\rho D}{\mu}\frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4Q}{\nu \pi D} = \frac{4Q}{10^{-6}\pi 0.0203} = 6.27x10^7 Q \qquad (6)$$

Factor de rugosidad:

$$\varepsilon = \frac{e}{D} = \frac{0.25}{20.3} = 0.0123$$

El sistema de ecuaciones (4), (5) y (6) no se puede resolver analíticamente, por ello lo haremos por un método numérico (aproximaciones sucesivas), el proceso se resume en la siguiente tabla.

Qa	Re	f	Qc
5,000	5225,0	0,0489	11,346
11,346	11856,6	0,0447	11,571
11,571	12091,6	0,0447	11,575
11,575	12095,9	0,0447	11,575

Resp. Q ≈11.6 Lpm

Anexo: Diagrama de flujo del proceso de cálculo: