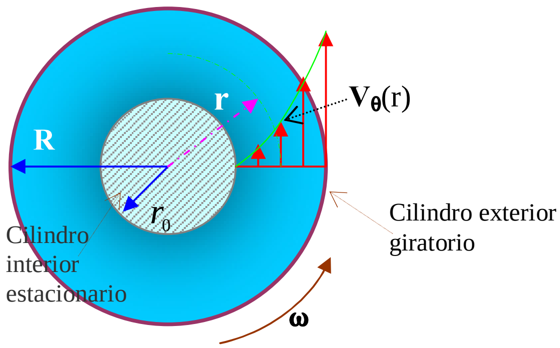
Problema. Determinar las distribuciones de velocidad **V_θ(r)**, y de tensión cortante **$\tau_{r\theta}$(r)**, para el flujo laminar tangencial de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros verticales coaxiales, cuando el cilindro exterior gira con una velocidad angular **ω.** Despreciar los efectos de borde.

Solución



En la figura se muestra esquemáticamente la configuración del sistema flujo.

Las siguientes hipótesis se extraen del enunciado del problema:

- Flujo permanente e incompresible
- Flujo laminar tangencial.

En estas condiciones para la solución del problema se aplicará la ecuación de cantidad de movimiento para fluidos newtonianos, Navier-Stokes, expresada en coordenadas cilíndricas. Cuya componente θ, esta dada por:

$$\rho\left[\cancelto{0}{\frac{\partial V_\theta}{\partial t}}+\cancelto{0}{V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}}+\cancelto{0}{\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}}+\cancelto{0}{V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}+\cancelto{0}{\frac{V_r V_\theta}{r}}\right]=\cancelto{0}{\rho g_\theta}-\cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}}+\mu\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\cancelto{0}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}}\right.$$
$$\left.+\cancelto{0}{\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}}+\cancelto{0}{\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}}-\frac{V_\theta}{r^2}\right] \quad \textbf{(4.6.1)}$$

Que para las condiciones planteadas en el problema, se reduce a:

$$0=\mu\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r^2}\right] \qquad (1)$$

La ecuación (1), se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)=0 \qquad (2)$$

la velocidad solo es función de la variable **r,** entonces, la última ecuación puede ser escrita como derivada total.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dV_\theta}{dr}\right)+\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)=0 \qquad (3)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por **dr** e integrando una vez, se tiene:

$$\frac{dV_\theta}{dr}+\frac{V_\theta}{r}=C_1 \qquad (4)$$

multiplicando ambos miembros por **r**:

$$r\frac{dV_\theta}{dr}+V_\theta=rC_1$$

esta última expresión se puede escribir, así:

$$\frac{d(rV_\theta)}{dr}=rC_1$$

finalmente, separando variables e integrando se obtiene:

$$\boxed{rV_\theta=C_1\frac{r^2}{2}+C_2} \qquad (5)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2, se pueden calcular a partir de las condiciones de de frontera:

$$\left.\begin{array}{l} r=r_0 \\ V_\theta=0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} r=R \\ V_\theta=\omega R \end{array}\right\}$$

reemplazando estos valores en la ecuación (5), se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0=C_1\dfrac{r_0^{\,2}}{2}+C_2 \\[2ex] \omega R^2=C_1\dfrac{R^2}{2}+C_2 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

y resolviendo este sistema, se obtienen los valores de las constantes C_1 y C_2,

$$\left.\begin{array}{l} C_1=\dfrac{2\omega R^2}{R^2-r_0^{\,2}} \\[2ex] C_2=-\dfrac{\omega R^2 r_0^2}{R^2-r_0^{\,2}} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Reemplazando (7) en (5) y despejando la velocidad, se tiene:

$$rV_\theta=\left(\frac{2\omega R^2}{R^2-r_0^{\,2}}\right)\frac{r^2}{2}+\left(-\frac{\omega R^2 r_0^2}{R^2-r_0^{\,2}}\right)$$

$$V_\theta=\frac{\omega R^2}{R^2-r_0^{\,2}}\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right) \qquad (8)$$

La distribución de tensiones de cortadura por efecto de la viscosidad, se calcula a partir de la ecuación:

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=-\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)+\cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}}\right]$$

que para las condiciones de este problema se reduce a:

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) \qquad (9)$$

La derivada del segundo miembro de la ecuación (9), se puede obtener a partir de la ecuación (8), reordena convenientemente

$$\frac{V_\theta}{r} = \frac{\omega R^2}{R^2 - r_0^2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

derivando respecto de r, se obtiene:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) = \frac{\omega R^2}{R^2 - r_0^2}\left(0 - \frac{-2r_0^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) = \frac{2\omega R^2 r_0^2}{R^2 - r_0^2}\left(\frac{1}{r^3}\right) \qquad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9), se obtiene la función de distribución de tensiones de corte viscosas.

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{2\omega R^2 r_0^2}{R^2 - r_0^2}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\boxed{\tau_{r\theta} = -\mu \frac{2\omega r_0^2}{1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2}\left(\frac{1}{r^2}\right)} \qquad (11)$$

En la siguiente figura se muestran las distribuciones de velocidad y esfuerzo cortante. Se puede apreciar que:

- Cuando la velocidad toma su valor mínimo, el esfuerzo cortante toma su valor máximo y
- el esfuerzo cortante se hace mínimo cuando la velocidad toma su valor máximo:

$$r = r_0; \qquad V_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = -\mu \frac{2\omega}{1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2}$$

$$r = R; \qquad V_\theta = \omega R; \quad \tau_{r\theta} = 0$$