Problema. Discutir el modelado dimensional de una bomba o ventilador para un fluido incompresible.

Solución:

i. Análisis de variables influyentes en el objeto de estudio:

Las variables más influyentes que permiten caracterizar el funcionamiento de turbo - máquinas, sean estas centrífugas o axiales, son:

Potencia, **P**; la altura piezométrica, **gH**; el rendimiento, η; diámetro medio del rotor, **D**; velocidad angular del rotor, ω; densidad del fluido, ρ; viscosidad del fluido, μ; flujo volumétrico, **Q**.

Del grupo anterior, la potencia suministrada, **P** el rendimiento, η, y la cabeza, **gH**; son dos parámetros que permiten describir el comportamiento de estas máquinas y cuyo valor depende del valor que tomen cada una de las variables restantes. Es decir que son funciones de: D, ω, ρ, μ y Q. Entonces para analizar la performance de estas máquinas debemos encontrar relaciones funcionales de la forma:

$$P = F(D, \omega, \rho, \mu, Q)$$

$$\eta = G(D, \omega, \rho, \mu, Q)$$

Para fines de modelado geométrico, determinaremos el grupo de parámetros adimensionales que caracterizan el problema planteado.

ii. Determinación de los grupos adimensionales:

- Lista de variables influyentes y sus dimensiones:

No.	Variable	símbolo	Dimensión
1	Potencia	P	$ML^2\theta^{-3}$
2	Rendimiento	η	1
3	Cabeza	gH	$L^2\theta^{-2}$
4	Flujo volumétrico	Q	$L^3\theta^{-1}$
5	Densidad del fluido	ρ	ML^{-3}
6	Viscosidad del fluido	μ	$ML^{-1}\theta^{-1}$
7	Diámetro del rotor	D	L
8	Velocidad angular del rotor	ω	θ^{-1}

- Dimensiones fundamentales: **M, L. y θ**
- Número de parámetros: según el teorema de Pi,

$$i = \underset{\text{Variables influyentes}}{8} - \underset{\text{Dimensiones fundamentales}}{3} = 5$$

Como η, es adimensional, constituye en si un parámetro adimensional.

$$\pi_1 = \eta \qquad (1)$$

En consecuencia sólo resta determinar 4 grupos adimensionales.

- Conjunto de variables que se repiten (recurrente),

  Se eligen atendiendo a las siguientes recomendaciones:

  1. Las variables objeto de estudio no deben formar parte de este grupo.
  2. Su número es igual al de las dimensiones fundamentales.
  3. El conjunto de las dimensiones deben estar representadas en este conjunto.
  4. La expresión dimensional de estas variables debe ser sencilla.

1	Densidad del fluido	**ρ**	ML^{-3}
2	Diámetro del rotor	**D**	**L**
3	Velocidad angular del rotor	**ω**	θ^{-1}

- A partir de la equivalencia dimensional del conjunto anterior, se pueden escribir las siguientes equivalencias, para las dimensiones dimensionales.

$$\begin{aligned} D &\equiv L & &\Rightarrow L \equiv D \\ \omega &\equiv \theta^{-1} & &\Rightarrow \theta \equiv \omega^{-1} \\ \rho &\equiv ML^{-3} & &\Rightarrow M \equiv \rho L^3 = \rho D^3 \end{aligned} \qquad (2)$$

- Tomando como pivote las variables: **P, gH, Q y μ,** que no forman parte del conjunto recurrente, y las equivalencias (1), se establecen los cuatro parámetros restantes:

$$\pi_2 = \frac{P}{ML^2\theta^{-3}} = \frac{P}{\rho D^3 D^2 (\omega^{-1})^{-3}} = \frac{\mathbf{P}}{\boldsymbol{\rho}\mathbf{D}^5\boldsymbol{\omega}^3} \qquad (3)$$

$$\pi_3 = \frac{gH}{L^2\theta^{-2}} = \frac{gH}{D^2 (\omega^{-1})^{-2}} = \frac{\mathbf{gH}}{\mathbf{D}^2\boldsymbol{\omega}^2} \qquad (4)$$

$$\pi_4 = \frac{Q}{L^3\theta^{-1}} = \frac{Q}{D^3 (\omega^{-1})^{-1}} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{D}^3\boldsymbol{\omega}} \qquad (5)$$

$$\pi_5 = \frac{\mu}{ML^1\theta^{-1}} = \frac{\mu}{\rho D^3 D^{-1} (\omega^{-1})^{-1}} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{D}^3\boldsymbol{\omega}} \qquad (6)$$

- Los 5 parámetros anteriores pueden ser agrupados, en la siguiente reilación funcional:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0 \qquad (7)$$

Sin embargo como la potencia, el rendimiento y la cabeza, son variables dependientes, los parámetros de loa que forman parte, π_1, π_2, π_3, deben ser expresados como función de los dos restantes:

$$\pi_1 = f_1(\pi_4, \pi_5) \qquad (8)$$

$$\pi_2 = f_2(\pi_4, \pi_5) \qquad (9)$$

$$\pi_3 = f_3(\pi_4, \pi_5) \qquad (10)$$

de donde:

$$\eta = f_1\left(\frac{Q}{D^3\omega}, \frac{\mu}{\rho D^2\omega}\right) \qquad (8a)$$

y

$$\frac{P}{\rho D^5\omega^3} = f_2\left(\frac{Q}{D^3\omega}, \frac{\mu}{\rho D^2\omega}\right) \qquad (9a)$$

Despejando **P**

$$P = \rho D^5\omega^3 f_2\left(\frac{Q}{D^3\omega}, \frac{\mu}{\rho D^2\omega}\right) \qquad (9b)$$

$$\frac{gH}{D^2\omega^2} = f_3\left(\frac{Q}{D^3\omega}, \frac{\mu}{\rho D^2\omega}\right) \qquad (10a)$$

Despejando **gH**

$$gH = D^2\omega^2 f_3\left(\frac{Q}{D^3\omega}, \frac{\mu}{\rho D^2\omega}\right) \qquad (10b)$$

Se conoce, por estudios experimentales realizados, que el parámetro que involucra a la viscosidad no es relevante en la determinación de este tipo de máquinas. Entonces el parámetro π_5, ser menospreciado, por lo que las expresiones anteriores pueden también escribirse así:

$$\boxed{\eta = f_1\left(\frac{Q}{D^3\omega}\right)} \quad ; \quad \boxed{P = \rho D^5\omega^3 f_2\left(\frac{Q}{D^3\omega}\right)} \quad ; \quad \boxed{gH = D^2\omega^2 f_3\left(\frac{Q}{D^3\omega}\right)}$$

Relaciones funcionales que deben ser establecidas experimentalmente.