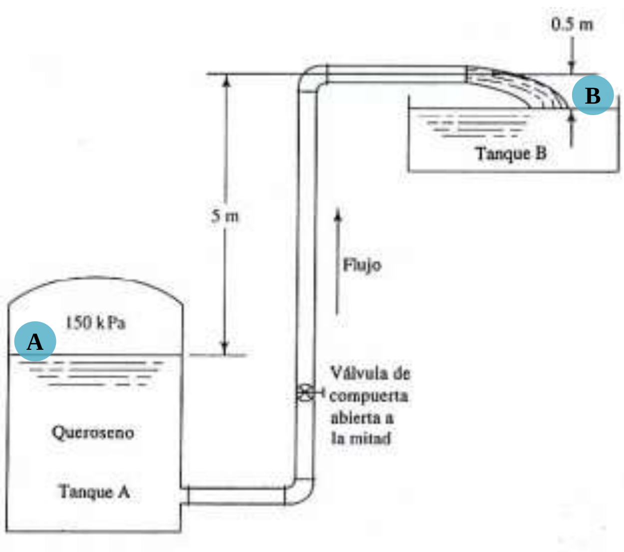
Problema (Mott Robert) Se encuentra fluyendo queroseno a 25°C en el sistema que se muestra en la figura. La longitud total de la tubería de cobre tipo K de 2 pulg es de 30 m. Los dos codos de 90º son de radio largo. Calcule el flujo volumétrico hacia el tanque B si una presión de 150 kPa se mantiene sobre el queroseno en el tanque A.



Resumen de datos

$\mu=1.64\times10^{-3}$ k/m-s (a 25 ºC)

ρ = 823 kg/m^3 (a 25 ºC)

p_A=150 kPa (presión manométrica en la parte superior del tanque A)

L = 30 m (longitud total de la tubería).

D= 49.76 mm (tubería de cobre tipo K de 2", por tablas)

e = 1.5 x10^{-3} mm (tubería de cobre dato empírico obtenido de tabla)

L_e/D = 20 (longitud equivalente para codo de radio largo de 90º, según tabla)

L_e/D = 160 (Válvula de compuerta abierta a la mitad, según tabla)

Variable a calcular

Q (flujo volumétrico), en este caso la caída de presión en el sistema de tubos en serie es un dato indirecto (se puede calcular a partir de la ecuación generalizada de Bernoulli).

Hipótesis

i) Flujo permanente e incompresible

Principios y/o Ecuaciones principales:

La ecuación de Darcy para el cálculo de la velocidad media de flujo y por tanto del caudal.

$$\Delta P = f\frac{L}{D}\frac{\rho V^2}{2} \quad (1)$$

Y la ecuación generalizada de Bernoulli (consecuencia de la primera ley de la termodinámica) para calcular la caída de presión en el sistema hidráulico ΔP

Resolución

Comenzamos, entonces calculando la caída de presión en la tubería del circuito hidráulico en serie mostrado en la figura:

Sabemos que, la caída de presión total por fricción y en accesorios total en la tubería-serie, es

$$h_p = \sum h_f + \sum h_a \quad (2)$$

Donde, la pérdida de carga por fricción está dada por la ecuación de Darcy,

$$h_f = \sum f_i \frac{L_i}{D_i}\frac{{V_i}^2}{2g} \quad (3)$$

Como todos los tramos de tubería son del mismo diámetro y material, la velocidad media de flujo es constante, y también el factor de fricción, la pérdida de carga por fricción está dada por:

$$h_f = f\frac{L_T}{D}\frac{V^2}{2g} \qquad \text{(3a)}$$

Donde L_T , es la longitud total de la tubería (30 m).

La pérdida de carga en accesorios, en términos de longitud equivalente, es:

$$h_a = \sum f_i\left(\frac{L_E}{D}\right)_i\frac{{V_i}^2}{2g}$$

Donde $\left(\frac{L_E}{D}\right)$, es la relación longitud equivalente del accesorio contra el diámetro de la tubería en la que esta insertado el accesorio.

Como el diámetro de la tubería es constante, la velocidad y el factor de fricción no cambian en todo el circuito-serie, por tanto

$$h_a = f\frac{{V_i}^2}{2g}\sum\left(\frac{L_E}{D}\right)_i \qquad \text{(4)}$$

Por tanto la pérdida de carga total por fricción y en accesorios en la red será -sustituyendo (3) y (4) en (2)-

$$h_p = f\frac{L_T}{D}\frac{V^2}{2g} + f\frac{{V_i}^2}{2g}\sum\left(\frac{L_E}{D}\right)_i = f\frac{{V_i}^2}{2g}\left(\frac{L_T}{D} + \sum\left(\frac{L_E}{D}\right)_i\right) \text{(5)}$$

De donde se puede despejar la velocidad media de flujo,

$$V = \sqrt{\frac{2gh_p}{f\left[\frac{L_T}{D}+\Sigma\left(\frac{L_E}{D}\right)_i\right]}} \qquad \text{(6)}$$

Para calcular la caída de presión h_p, aplicamos la ecuación generalizada de Bernoulli, entre los puntos A y B del sistema mostrado en la figura.

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + h_p$$

La presión, $p_{B,}$=0 (presión atmosférica),

Las velocidades en la superficie del queroseno son despreciables

Por tanto,

$$h_p = \frac{p_A}{\rho g} - (Z_B - Z_A)$$

$$h_p = \frac{150x10^3}{823x9.8} - 4.5 = 13.1\ mcq$$

$$\sum\left(\frac{L_E}{D}\right)_i \text{=2x20 160 = 200}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (6), tenemos,

$$V = \sqrt{\frac{2x9.8x13.1}{f\left[\frac{30}{0.04976}+200\right]}} = \frac{0.5655}{\sqrt{f}} \qquad \text{(7)}$$

En esta ultima ecuación el factor de fricción, *f*, depende de la velocidad media de flujo V, por lo que no es posible calcular V de manera directa, por ello empleamos un método iterativo aproximado para su solución.

Como sabemos el factor de fricción es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

Número de Reynolds:

$$R = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{823 \cdot V \cdot 0.04976}{1.64 \cdot 10^{-3}} = 2.5 \cdot 10^4 V \quad (8)$$

Rugosidad relativa

$$\varepsilon = \frac{e}{D} = \frac{1.5\text{x}10^{-3}}{49.76} = 3 \cdot 10^{-5}$$

Las sucesivas iteraciones se muestran en la siguiente tabla:

Va	R	f	V	error
10	2.50E+05	0.015	4.617	53.83%
4.617	1.15E+05	0.017	4.337	6.06%
4.337	1.08E+05	0.0175	4.275	1.43%
4.275	1.07E+05	0.0178	4.239	0.84%
4.239	1.06E+05	0.0179	4.227	0.28%

Donde Va es un valor adoptado en base al cual se calcular R y f (diagrama de Moody), y V el valor calculado con la ecuación (7). Inicialmente se asume un valor arbitrario para Vc=10 (podía ser otro valor también), luego se toma como nuevo valor adoptado para Vc el ultimo valor calculado, V, y así sucesivamente.

Asumimos para la velocidad media de flujo el valor 4,227 m/s con un error de 0.28%, como mejor aproximación

Entonces el caudal será,

$$Q = VA = V\frac{\pi}{4}D^2$$

$$Q = 4.227\frac{\pi}{4}0.04976^2 = 0.00822\frac{m^3}{s}$$

$$Q \cong 493\ l/min$$

Una manera directa de resolver las anteriores ecuaciones es combinar las ecuaciones 7 y 8, para calcular el factor $R\sqrt{f}$,

$$R = 2.5 \cdot 10^4 \frac{0.5655}{\sqrt{f}}$$

$$R\sqrt{f} = 1.4138 \cdot 10^4$$

Ahora usamos la ecuación de Colebrook para el factor de fricción

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2log\left(\frac{\frac{e}{D}}{3.7} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2log\left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{3.7} + \frac{2.51}{1.4138 \cdot 10^4}\right) = 7.4626$$

Reemplazando este valor en la ecuación (7), calculamos la velocidad $\quad V = \frac{0.5655}{\sqrt{f}}$

$$V = 0.5655 \cdot 7.4626 = 4.22 \text{ m/s}$$

También se puede calcular el coeficiente de fricción (aunque en este caso no es necesario, conocer este dato para el cálculo de V)

$$\frac{1}{f} = 7.4626^2 \ \rightarrow f = 0.017956$$