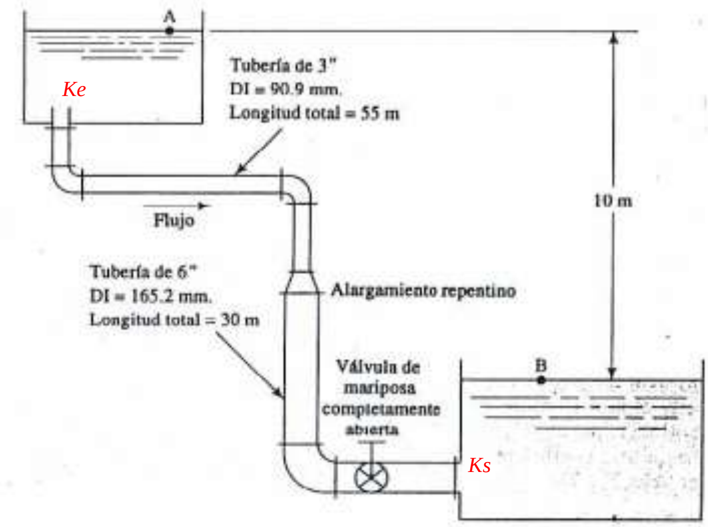
**Problema** (Mott Robert) Se encuentra fluyendo agua a 40ºC de A hacia B a través del sistema mostrado en la figura. Determine la velocidad de flujo de volumen de agua si la distancia vertical entre las superficies de los dos depósitos es 10 m. Ambas tuberías son de hierro cubiertas de asfalto. Los codos son estándar.




Resumen de datos

$\mu$=6.51x10$^{-4}$ k/m-s ( a 40 ºC)

$\rho$ = 992 kg/m$^3$ ( a 40 ºC)

$D_1$= 90.9 mm (tubería de 3”)

$L_1$ = 55 m (longitud total de la tubería de 3”).

$D_2$= 165.2 mm (tubería de 6”)

$L_2$ = 30 m (longitud total de la tubería de 6”).

e = 0.12 mm (tubería de hierro revestida de asfalto, obtenido de tabla)

$L_e/D$ = 30 (longitud equivalente para codo estándar de 90º, según tabla)

$L_e/D$ = 45 (Válvula de mariposa completamente abierta, según tabla)

$K_a$ =0.5 (Coeficiente de resistencia de la expansión súbita)

$K_e$ = 1.0 (Coeficiente de resistencia de entrada para tubería entrante)

$K_s$=1.0 (coeficiente de resistencia de salida, no importa la forma de conexión del tubo con el tanque).

Variable a calcular

*Q (flujo volumétrico), en este caso las pérdidas de carga en el sistema de tubos en serie es un dato indirecto (se puede calcular a partir de la ecuación generalizada de Bernoulli).*

Hipótesis

i) *Flujo permanente e incompresible*

Principios y/o Ecuaciones principales:

*La ecuación generalizada de Bernoulli (consecuencia de la primera ley de la termodinámica) para calcular la pérdida de carga en el sistema de tuberías.*
*La ecuación de Darcy para el cálculo de la velocidad media de flujo y por tanto del caudal.*

Resolución

Calculemos, primero la pérdida de carga (por fricción y en accesorios), $h_p$, en el sistema hidráulico. Para esto aplicamos la ecuación generalizada de Bernoulli, entre los puntos A y B de la superficie de los tanques, mostrados en la figura.

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_p \qquad (1)$$

Las presiones, $p_A$ y $p_B$ son 0 (presión atmosférica),

Las velocidades en la superficie de los tanques $V_A$ y $V_B$ son despreciables (tanques de grandes dimensiones).

Por tanto,

$$h_p = Z_A - Z_B$$

$$h_p = 10\ mca$$

Sabemos que en un sistema de tuberías en serie la perdida de carga por fricción y en accesorios total es,

$$h_p = \sum h_f + \sum h_a \qquad (2)$$

Donde, la pérdida de carga por fricción está dada por la ecuación de Darcy,

$$h_f = \sum f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{{V_i}^2}{2g} \ (3)$$

Como todos los dos tramos de tubería son de diferente diámetro, la velocidad media de flujo en cada tramo es diferente, y también el factor de fricción, entonces la pérdida de carga por fricción está dada por:

$$h_f = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{{V_1}^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{{V_2}^2}{2g} \qquad (3a)$$

En este caso, es mejor poner $h_f$ en función del flujo volumétrico Q.

$$Q = VA = V \frac{\pi}{4} D^2 \rightarrow V = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad (4)$$

Sustituyendo en (3a)

$$h_f = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_1^4} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_2^4} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g}\left(f_1 \frac{L_1}{D_1^5} + f_2 \frac{L_2}{D_2^5}\right) \qquad (5)$$

$$h_f = \frac{8Q^2}{\pi^2 g}\left(f_1 \frac{55}{0.0909^5} + f_2 \frac{30}{0.1652^5}\right)$$

$$h_f = (733006 f_1 + 20167 f_2) Q^2 \qquad (5a)$$

La pérdida de carga en accesorios, en términos de longitud equivalente y coeficiente de resistencia, es:

$$h_a = \sum f_i \left(\frac{L_E}{D}\right)_i \frac{{V_i}^2}{2g} + \sum k_j \frac{{V_j}^2}{2g} \qquad (6)$$

Donde $\left(\frac{L_E}{D}\right)$ , es la relación longitud equivalente del accesorio contra el diámetro de la tubería en la que esta insertado el accesorio.

$$h_a = 2f_1 \left(\frac{L_E}{D}\right)_{codo} \frac{{V_1}^2}{2g} + f_2 \left(\frac{L_E}{D}\right)_{codo} \frac{{V_2}^2}{2g} + f_2 \left(\frac{L_E}{D}\right)_{vavula} \frac{{V_2}^2}{2g} + (k_a + k_e) \frac{{V_1}^2}{2g} + k_s \frac{{V_2}^2}{2g}$$
(6a)

Combinado la ecuación 6a con 4, se tiene

$$h_a = \left(\left(2f_1 \frac{1}{D_1^4} + f_2 \frac{1}{D_2^4}\right)\left(\frac{L_E}{D}\right)_{codo} + f_2 \frac{1}{D_2^4}\left(\frac{L_E}{D}\right)_{vavula} + (k_a + k_e)\frac{1}{D_1^4} + k_s \frac{1}{D_2^4}\right)\frac{8Q^2}{\pi^2 g} \quad (6b)$$

Sustituyendo valores y haciendo cálculos tenemos,

$$h_a = \left(\left(f_1 \frac{2}{0.0909^4} + f_2 \frac{1}{0.1652^4}\right) 30 + f_2 \frac{45}{0.1652^4} + \frac{1.5}{0.0909^4} + \frac{1}{0.1652^4}\right)\frac{8Q^2}{\pi^2 g}$$

$$h_a = (72687.5f_1 + 3332.5f_2 + 1928.2)Q^2 \quad (6c)$$

Por tanto la pérdida de carga total por fricción y en accesorios en la red será:

$$h_p = (733006f_1 + 20167f_2)Q^2 + (72687.5f_1 + 3332.5f_2 + 1928.2)Q^2$$

$$h_p = (805693.5f_1 + 23499.5f_2 + 1928.2)Q^2 = 10 \quad (7)$$

De donde,

$$Q = \sqrt{\frac{10}{805693.5f_1 + 23499.5f_2 + 1928.2}}$$

Como sabemos el factor de fricción es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

Número de Reynolds:

$$R = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\mu \pi D} \quad (8)$$

$$R_1 = \frac{4 \cdot 992Q}{6.51\text{x}10^{-4}\pi 0.0909} = 2.134x10^7 Q$$

$$R_2 = \frac{4 \cdot 992Q}{6.51\text{x}10^{-4}\pi 0.1652} = 1.174x10^7 Q$$

Rugosidad relativa

$$\varepsilon_1 = \frac{e}{D_1} = \frac{0.12}{90.90} = 1.3 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{e}{D_2} = \frac{0.12}{165.2} = 7 \cdot 10^{-4}$$

A partir de estas ecuaciones y por aproximaciones sucesivas calculamos el flujo volumétrico.

| Qa | R1 | f1 | R2 | f2 | Q | error |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.13E+07 | 0.02 | 1.17E+07 | 0.018 | 0.02327 | 97.67% |
| 0.02327 | 4.97E+05 | 0.0205 | 2.73E+05 | 0.0185 | 0.02301 | 1.12% |
| 0.02301 | 4.91E+05 | 0.021 | 2.70E+05 | 0.019 | 0.02277 | 1.04% |
| 0.02277 | 4.86E+05 | 0.0211 | 2.67E+05 | 0.0193 | **0.02271** | 0.26% |

Entonces el flujo volumétrico es,

$$\boldsymbol{Q \cong 0.02271 \frac{m^3}{s} = 1362.6 \frac{l}{min}}$$