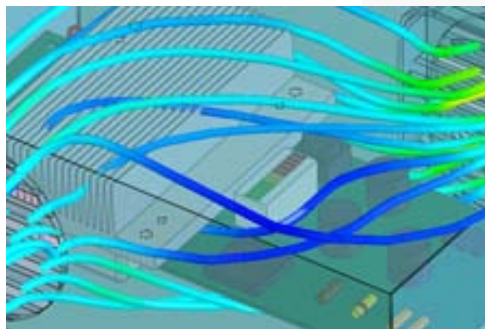
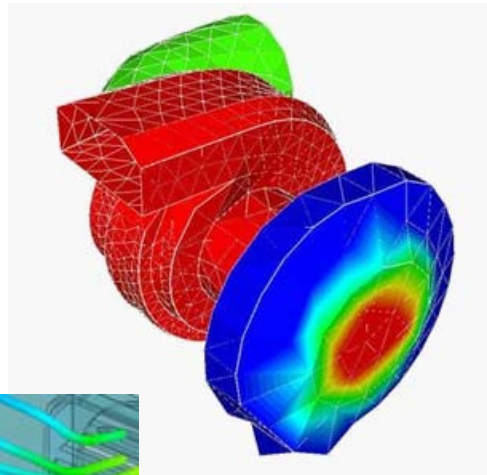


# 4

## Ecuaciones diferenciales del flujo fluido



### Contenido

- 4.1 Introducción
- 4.2 Ecuación diferencial de continuidad
- 4.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento
- 4.4 Flujo Neto de cantidad de movimiento a través de la superficie de control de un volumen de control diferencial.
- 4.5 Cambio de cantidad de movimiento dentro del volumen de control
- 4.6 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento
- 4.7 Ecuación de Euler
- 4.8 Ecuación de Navier Stokes.- Fluidos newtonianos.
- 4.9 Integración de la ecuación de Euler.- Ecuación de Bernoulli Bibliografía

*Emilio Rivera Chávez*

## 4.1 Introducción

En el capítulo anterior se han estudiado las leyes fundamentales del flujo fluido, las que han sido expresadas matemáticamente en forma de ecuaciones integrales para un volumen de control arbitrario, si bien estas ecuaciones son importantes por su aplicación práctica dado que permiten evaluar globalmente un determinado flujo fluido, se caracterizan por trabajar con valores promedio de las propiedades del flujo fluido. Sin embargo existen situaciones en las que es necesario conocer la variación de las propiedades del flujo de un punto a otro. Una forma de resolver este problema es aplicar las ecuaciones integrales a un volumen de control diferencial, para obtener las ecuaciones de flujo para un punto del flujo fluido. En este capítulo se obtendrá la expresión diferencial de las ecuaciones de continuidad ( principio de conservación de la masa) y de cantidad de movimiento (segunda ley de Newton de la mecánica), a partir de su forma integral.

Existen tres métodos diferentes para obtener las ecuaciones diferenciales del flujo fluido:

- Utilizando el cálculo vectorial.- En este caso no se necesita ningún razonamiento físico adicional, pues se trata de obtener las expresiones diferenciales a partir de las expresiones integrales siguiendo un riguroso procedimiento matemático.
- Aplicando las ecuaciones integrales a un volumen de control elemental.- Se obtienen las ecuaciones diferenciales al llevar la expresión resultante al límite haciendo cuando el volumen se hace infinitesimal.
- Aplicando las ecuaciones básicas del sistema a un volumen elemental.- De este modo se obtienen directamente las ecuaciones diferenciales para un volumen elemental mediante balances de masa, cantidad de movimiento y energía.

## 4.2 Ecuación diferencial de continuidad

Como se recordará la ecuación integral de continuidad esta dada por:

$$\oiint_{sc} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dV \quad (4.2.1)$$

La ecuación diferencial de continuidad que no es mas que la ley de conservación de la masa, puede ser obtenida, como se explicó en el epígrafe anterior, de varias maneras. En este caso utilizaremos el teorema de Gauss para convertir la integral de superficie del primer miembro de la ecuación integral de continuidad (4.2.1). en una integral de volumen.

$$\oiint_{sc} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{vc} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (4.2.2)$$

Sustituyendo (4.2.2) en (4.2.1) se obtiene:

$$\iiint_{vc} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dV$$

Llevando el segundo miembro de la ecuación al primer miembro y permutando la derivada con la integral se obtiene:

$$\iiint_{vc} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV + \iiint_{vc} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = 0$$

$$\iiint_{vc} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0$$

Para que la integral sea cero, puesto que el volumen de control es arbitrario, necesariamente se debe cumplir que:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.2.3)$$

Esta última ecuación, es la forma diferencial de la ecuación de continuidad.

Para flujo permanente:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (4.2.4)$$

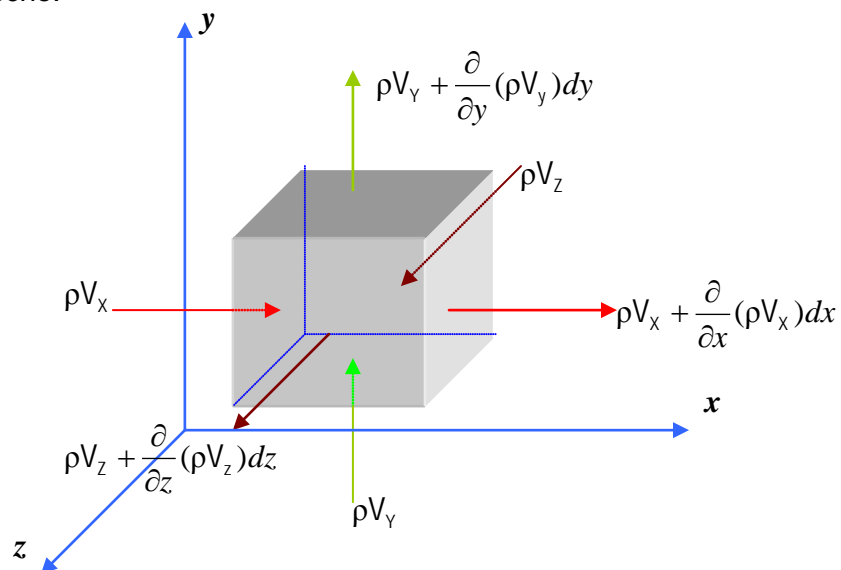
Y para flujo incompresible

$$(4.2.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

La ecuación (4.2.3) puede ser expresada en cualquier sistema de coordenadas. Así por ejemplo en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.2.5)$$

El resultado anterior puede obtenerse directamente por aplicación de la ecuación (4.2.1) al volumen elemental mostrado en la figura 4.1. El estudiante se encargará de comprobar este hecho.



**Figura 4.1** Flujo de masa a través de las 6 caras de un volumen de control diferencial.

### 4.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento

La ecuación diferencial de cantidad de movimiento es la forma diferencial de la segunda ley de Newton del movimiento para el flujo fluido. Por ello para obtener la ecuación diferencial de continuidad se utilizará la forma integral de esta ecuación correspondiente a un volumen de control arbitrario.

$$\underbrace{\sum_{v.c.} F_{m\acute{a}sicas} + \sum_{s.c.} F_{superficie}}_{\text{Suma de fuerza externas, m\acute{a}sicas y superficiales, que act\aa un sobre el volumen de control}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \mathbf{v} \rho dV}_{\text{Cambio de cantidad de movimiento dentro del volumen de control}} + \underbrace{\iint_{s.c.} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}_{\text{Flujo neto de cantidad de movimiento a trav\as de la superficie de control}} \quad (4.3.1)$$

Aplicando esta ecuación a un volumen de control elemental, dividiendo miembro a miembro entre el volumen y llevando esta razón al limite, cuando el volumen tiende a cero, se obtiene la ecuación que permite calcular la variación de la cantidad de movimiento en un punto del flujo fluido. Así.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{v.c.} F_{m\acute{a}sicas}}{\Delta V} + \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{superficie}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \mathbf{v} \rho dV}{\Delta V} + \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{s.c.} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta V} \quad (4.3.2)$$

Cada uno de los términos de la ecuación anterior serán evaluados por separado.

#### 4.3.1 Balance de las fuerzas externas

Las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control están agrupadas en dos categorías: Fuerzas másicas debidas a la acción de los campos de fuerzas y fuerzas superficiales debidas a las tensiones normales y tangenciales que se manifiestan por efecto presión y a la acción viscosa.

- **Fuerzas másica debidas a la accion del campo gravitacional**

Esta fuerza esta representada por el primer término del primer miembro de la ecuación (4.3.2) y concretamente se refiere al peso del volumen elemental de fluido contenido dentro del volumen de control, que en el límite se reduce a un punto.

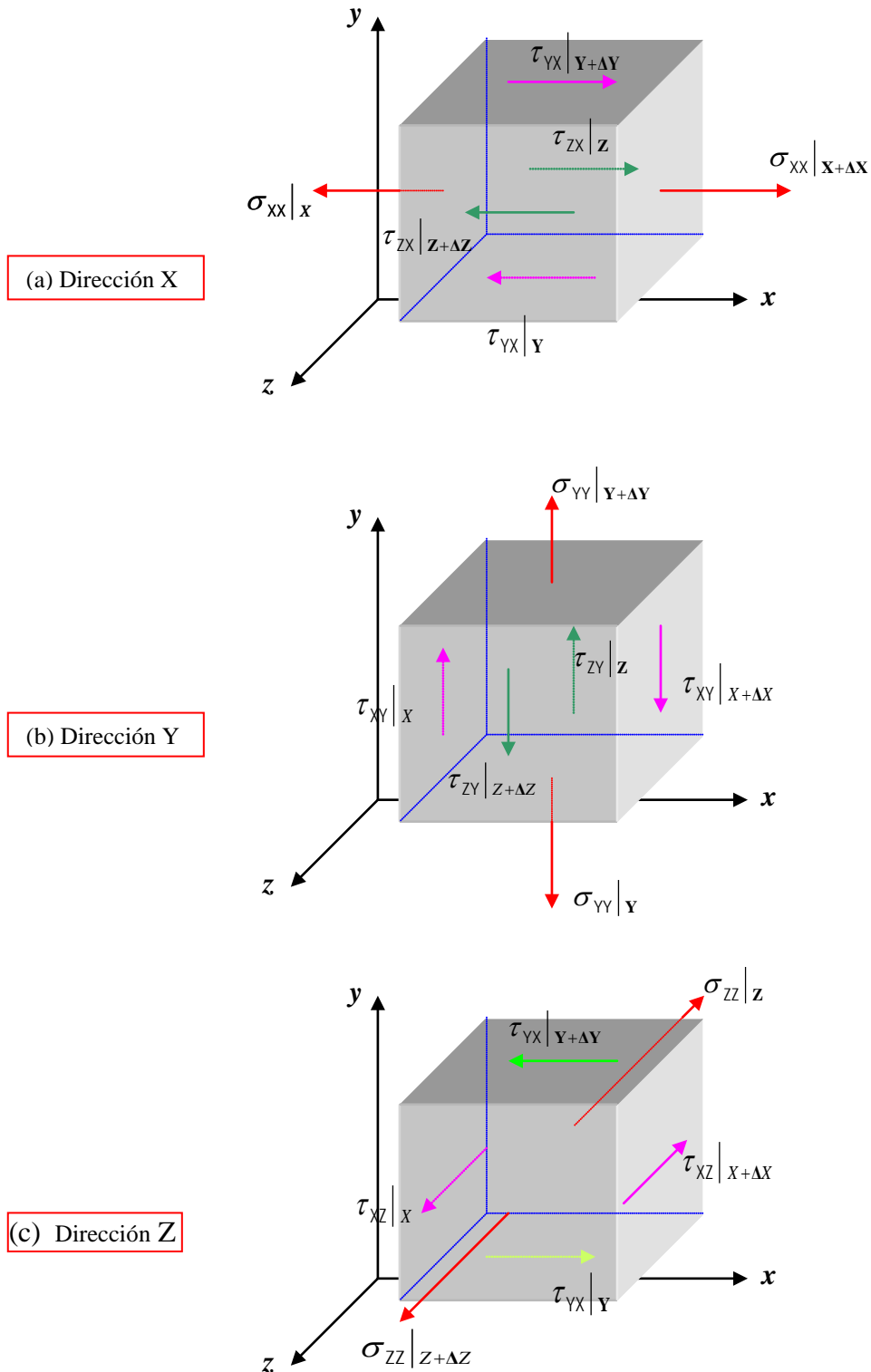
La masa del volumen de control elemental es:

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

Entonces la fuerza másica por unidad de volumen, será:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{v.c.} F_{grav.}}{\Delta V} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_{v.c.} \rho \mathbf{g} dV}{\Delta V} \\ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{v.c.} F_{grav.}}{\Delta V} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\rho \mathbf{g} \Delta V}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \rho \mathbf{g} \\ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{v.c.} F_{grav.}}{\Delta V} &= \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

- **Fuerzas superficiales debidas a la viscosidad y presión**



**Figura 4.2** En la figura se muestran las componente cartesianas, en las tres direcciones, de las fuerzas superficiales que actúan sobre un volumen de control diferencial.

En la figura 4.2 se muestra las diversas fuerzas que actúan sobre la superficie de control. Para simplificar la sumatoria de fuerzas superficiales, se consideraran las tres direcciones ortogonales por separado.

### Dirección x

Con referencia a la figura 4.2 (a), se tiene:

$$\sum_{s.c.} F_{\text{sup } X} = (\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x) \Delta y \Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y) \Delta x \Delta z + (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z) \Delta x \Delta y$$

Dividiendo la expresión anterior entre el volumen y llevando al límite, cuando el volumen de control tiende a cero, se tiene:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{sup } X}}{\Delta v} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x) \Delta y \Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y) \Delta x \Delta z + (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta}$$

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{sup } X}}{\Delta v} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z}{\Delta z}$$

Finalmente, aplicando la definición de derivada de una función, se obtiene:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{sup } X}}{\Delta v} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (4.3.4)$$

De manera análoga, se pueden obtener expresiones similares para las componentes en las otras dos direcciones:

### Dirección y

De la figura 4.2 (b).

$$4.3.5) \quad \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{sup } Y}}{\Delta v} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad ($$

### Dirección z

Figura 4.2 (c).

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{sup } Z}}{\Delta v} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \quad (4.3.6)$$

La fuerza superficial resultante será:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{superficial}}}{\Delta v} = \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \vec{k} \quad (4.3.7)$$

Las tensiones que dan lugar a las fuerzas superficiales, como ya se dijo antes, son debidas a la presión y al efecto de la viscosidad debido al movimiento y que se manifiesta como un gradiente de velocidad. Debido a ello las tensiones normales se pueden expresar como la suma de ambos efectos:

$$\sigma_{ii} = -p + \tau_{ii} \quad (4.3.8)$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (4.3.7) y reagrupando los términos convenientemente se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{superficial}}}{\Delta V} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right) \vec{k} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Esta última expresión puede ser escrita en forma compacta utilizando operadores vectoriales y tensoriales.

Así, el primer término de la ecuación representa el gradiente de presión, como se vio en el capítulo 2,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}\right) = \nabla p$$

Por otra parte el segundo término de esta ecuación, que representa los esfuerzos viscosos, puede ser expresado como la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos,  $\tau_{ij}$ .

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (4.3.10)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right) \vec{k} = \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (4.3.11)$$

Entonces la fuerza superficial neta en un punto del flujo fluido puede ser expresada, así:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{s.c.} F_{\text{superficial}}}{\Delta V} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (4.3.12)$$

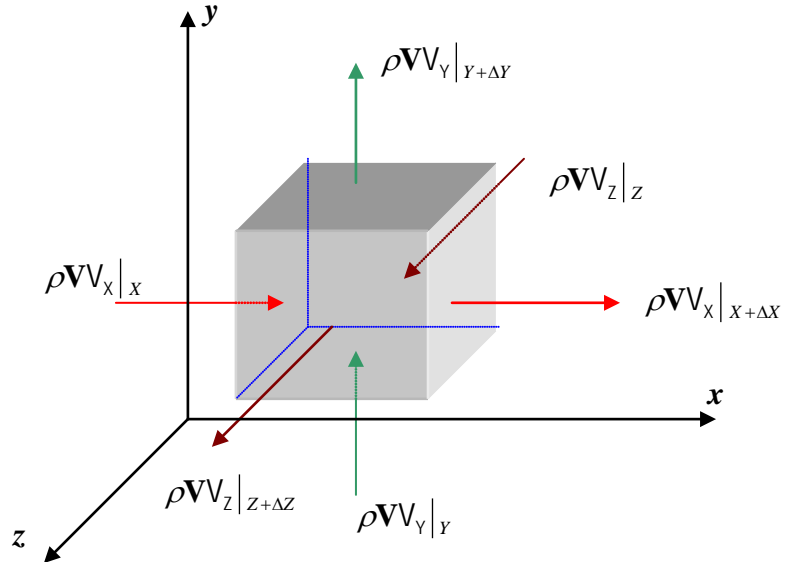
- **Fuerza externa neta**

Entonces, la fuerza neta actuando sobre el volumen de control, cuando este se reduce a un punto, esta dada por:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum F}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum F_{\text{masica}}}{\Delta V} + \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum F_{\text{superficial}}}{\Delta V} = \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{Fuerza de gravedad}} + \underbrace{-\nabla p}_{\text{Fuerza de presión}} + \underbrace{\nabla \cdot \tau_{ij}}_{\text{Fuerza viscosa}} \quad (4.3.13)$$

Fuerza másica      Fuerza superficial

#### 4.4 Flujo Neto de cantidad de movimiento a través de la superficie de control de un volumen de control diferencial.



**Figura 4.3** Flujo de cantidad de movimiento a través de las 6 caras de un volumen de control diferencial.

En la figura se muestra el flujo de cantidad de movimiento a través de las 6 caras del volumen de control. Entonces el flujo neto estará dado por:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oiint_{sc} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{(\rho v_x |_{x+\Delta x} - \rho v_x |_x) \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{(\rho v_y |_{y+\Delta y} - \rho v_y |_y) \Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{(\rho v_z |_{z+\Delta z} - \rho v_z |_z) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] \quad (4.1)$$

Llevando al límite el segundo miembro de la ecuación, se tiene:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oiint_{sc} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \quad (4.2)$$

Realizando las operaciones de derivación indicadas en el lado derecho de la ecuación y reagrupando se obtiene:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oiint_{sc} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \mathbf{v} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] + \rho \left[ v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right] \quad (4.3)$$



Según la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.4.4)$$

Sustituyendo esta última relación en la ecuación (4.4.3), ésta última toma la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oiint_{sc} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \quad (4.4.5)$$

Expresado en forma vectorial:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oiint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (4.4.6)$$

#### 4.5 Cambio de cantidad de movimiento dentro del volumen de control

La variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control, por unidad de volumen en el límite, cuando este tiende a cero, está dado por:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \mathbf{v} \rho dV}{\Delta x \Delta y \Delta z} &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial(\mathbf{v}\rho)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\partial(\mathbf{v}\rho)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial(\mathbf{v}\rho)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Realizando la operación indicada, se tiene.

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \mathbf{v} \rho dV}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.5.2)$$

#### 4.6 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento

Sustituyendo los resultados dados por las ecuaciones: (4.3.13), (4.4.6) y (4.5.2) en (4.3.1) se tiene la expresión final de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento en forma vectorial.

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (4.6.1)$$

$\underbrace{\rho \mathbf{g} \quad -\nabla p \quad + \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}_{\text{Suma de Fuerzas externas}}$

$= \underbrace{\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)}_{\text{Masa por aceleración}}$

$\underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{Fuerza de gravedad}}$

$\underbrace{-\nabla p}_{\text{Fuerza de presión}}$

$\underbrace{+\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}_{\text{Fuerza viscosa}}$

$\underbrace{\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{Aceleración local}}$

$\underbrace{+\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{Aceleración por transporte}}$

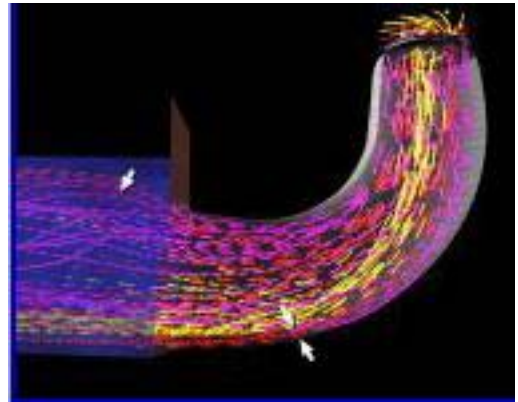
#### 4.7 Ecuación de Euler

Una situación particular de la ecuación (4.6.1), corresponde al flujo no viscoso, es decir cuando no existen tensiones de corte, es decir:

$$\tau_{ij} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \tau_{ij} = 0$$

Por lo cual la ecuación diferencial de cantidad de movimiento (4.6.1), se reduce a

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \quad (4.7.1)$$

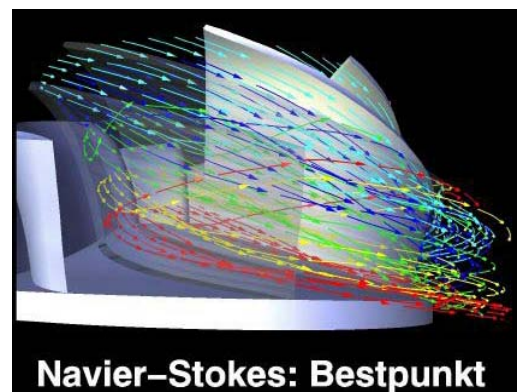


$$\rho \mathbf{g} - \nabla p = \rho \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \quad (4.7.2)$$

#### 4.8 Ecuación de Navier Stokes.- Fluidos newtonianos.

Para un fluido newtoniano de viscosidad,  $\mu$ , y para flujo incompresible la ecuación de Newton de la viscosidad se puede generalizar para flujo tridimensional, así:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

Por otra parte la ecuación (4.6.1) puede expresarse en coordenadas rectangulares, en base a sus tres componentes:

Componente x:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial z} \right)$$

Componente y:

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial z} \right)$$

Componente z:

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} \right) \quad (4.8.2)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.8.1) en (4.8.2) se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento para flujo incompresible de un fluido newtoniano, de densidad,  $\rho$ , y viscosidad,  $\mu$ , constante; en coordenadas rectangulares:

Componente x

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial z} \right)$$

Componente y

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_y}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial z} \right)$$

Componente z

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_z}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} \right) \quad (4.8.3)$$

Las ecuaciones escalares anteriores, tiene la siguiente expresión vectorial equivalente:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (4.8.4)$$

En el anexo, se presenta el desarrollo de la ecuación (4.8.4), en los sistemas de coordenadas más usuales.

#### 4.9 Integración de la ecuación de Euler.- Ecuación de Bernoulli

Para el caso de flujo ideal, permanente e incompresible, la integración de la ecuación de Euler da como resultado la conocida ecuación de Bernoulli.

Para ello se evaluará la ecuación (4.7.1), a lo largo de una línea de corriente. Utilizando en este caso las coordenadas de trayectoria, en las que la dirección  $\mathbf{s}$ , permanece siempre tangente a la trayectoria de la partícula fluida (línea de corriente), figura 4.4.

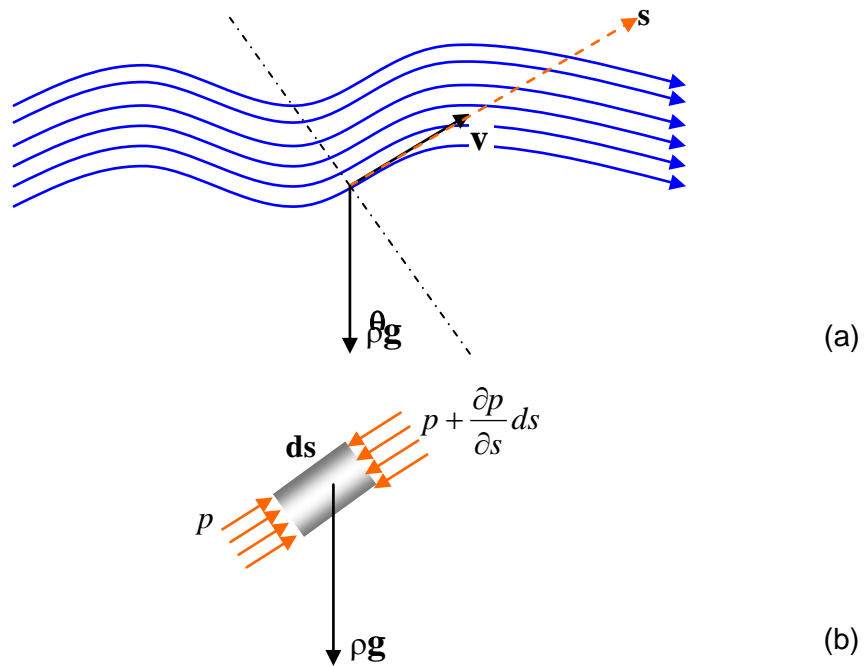


Figura 4.3. (a) Flujo ideal representado mediante líneas de corriente (b) Elemento diferencial de fluido, mostrando las fuerzas másicas y superficiales, que actúan sobre una partícula fluida.

Recordamos la ecuación (4.7.1) de Euler para flujo ideal sin fricción.

$$\rho\mathbf{g} - \nabla p = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \quad (4.7.1)$$

En este caso particular las componentes de la ecuación en la dirección  $\mathbf{s}$ , son:

$$\rho\mathbf{g} = -\rho g \cdot \text{sen} \theta \cdot \bar{\mathbf{u}}_s - \rho g \cdot \text{cos} \theta \cdot \bar{\mathbf{u}}_n$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial s} \bar{\mathbf{u}}_s$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{flujo permanente})$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = v \frac{\partial v}{\partial s} \bar{\mathbf{u}}_s \quad (4.9.1)$$

Sustituyendo las expresiones (4.9.1) en la ecuación (4.7.1), se tiene:

$$-\rho g \cdot \text{sen} \theta \cdot \vec{u}_s - \frac{\partial p}{\partial s} \vec{u}_s = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{u}_s \quad (4.9.2)$$

Tratándose de un flujo unidireccional, en la dirección  $s$ , la última ecuación puede escribirse del siguiente modo:

$$-\rho g \cdot \text{sen} \theta - \frac{dp}{ds} = \rho v \frac{dv}{ds}$$

multiplicando por  $ds$

$$-\rho g \cdot \text{sen} \theta \cdot ds - dp = \rho v \cdot dv$$

dividiendo entre  $\rho$

$$g \cdot \text{sen} \theta \cdot ds + \frac{dp}{\rho} + v \cdot dv = 0 \quad (4.9.3)$$

la diferencial de arco,  $ds$ , se puede calcular mediante la siguiente aproximación:



$$ds \approx \frac{dz}{\text{sen} \theta}$$

$$\therefore ds \cdot \text{sen} \theta = dz$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.9.3), e integrando, se tiene:

$$\int g \cdot dz + \int \frac{dp}{\rho} + \int v \cdot dv + C$$

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C \quad (4.9.4)$$

Para flujo incompresible,  $\rho = \text{constante}$ , entonces:

$$g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C \quad (4.9.5)$$

Ecuación que expresa que, para las condiciones de flujo dadas, flujo ideal, permanente e incompresible, la energía mecánica total permanece constante en cualquier punto de una línea de corriente. Esta ecuación, como ya se vio en el curso de física básica es conocida con el nombre de ecuación de Bernoulli.

### Bibliografía

- Shames H. Irving, *La Mecánica de los Fluidos*, McGraw-Hill.  
White M. Frank, *Mecánica de Fluidos*, McGraw-Hill.  
Fox Robert, *Introducción a la Mecánica de los Fluidos*, McGraw-Hill  
Hughes William, *Dinámica de Fluidos*, McGraw-Hill  
Welty James, et al, *Fundamentals of momentum, heat & mass transfer*, John Wiley & Sons.