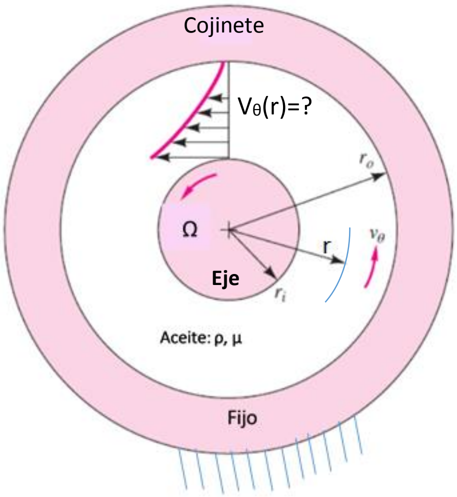
Ejemplo 2.- Flujo de un fluido newtoniano entre tubos concéntricos.

Un cilindro de radio r_i gira con una velocidad angular constante de **Ω** rad/s dentro de un cojinete estacionario de radio r_0, como se muestra en la figura. El cilindro y el cojinete están separados por un aceite con viscosidad ρ kg/m³. El aceite es newtoniano. Encuentre el perfil de velocidad tangencial V_θ y de esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$ del aceite como función de r y de los parámetros pertinentes de geometría y propiedades del fluido. Suponga flujo laminar, que se alcanzan condiciones de estado permanente y que puede utilizarse la ley de viscosidad de Newton a pesar de que este flujo no es paralelo. Pueden despreciarse los efectos de borde. ¿Cuál es el par necesario que se debe aplicar para hacer girar el eje?



Solución

La ecuación diferencial de cantidad de movimiento es la que rige el flujo del fluido,

$$\rho \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\nabla} p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau_{ij}} = \rho \frac{\boldsymbol{DV}}{\boldsymbol{Dt}} \qquad (1)$$

Dada la geometría del problema, tomamos un volumen de control en coordenadas cilíndricas y representamos en este el flujo de cantidad de movimiento a través de sus caras en la dirección de flujo, así como las fuerzas que actúan sobre el volumen de control infinitesimal provocando el transporte de cantidad de movimiento, previo análisis de la situación planteada:

- Debido a la longitud infinita del cilindro y cojinete, despreciamos los efectos de borde por lo que no hay movimiento axial: $V_z = 0$.
- El cilindro interior es concéntrico con el cojinete y gira con velocidad angular constante, por lo que asumimos que hay simetría circular, debido a ello las partículas fluidas se mueven tangencialmente y la velocidad varía solo en función de **r** (por efecto de la viscosidad) y es independiente de θ.
- Como la componente radial de velocidad es $V_{r=ro}$ =0 en la pared interior del cojinete, así como en el cilindro $V_{r=ri}$ =0, concluimos que V_r=0 en cualquier punto del flujo. Entonces el movimiento tiene que ser únicamente circular, V_θ **=** $V_\theta(r)$. Dicho de otro modo la velocidad solo tiene componente tangencial y esta es sólo función de r. En consecuencia solo existe esfuerzo cortante en la cara r y es función de r, $\boldsymbol{\tau_{r\theta}}(r)$.

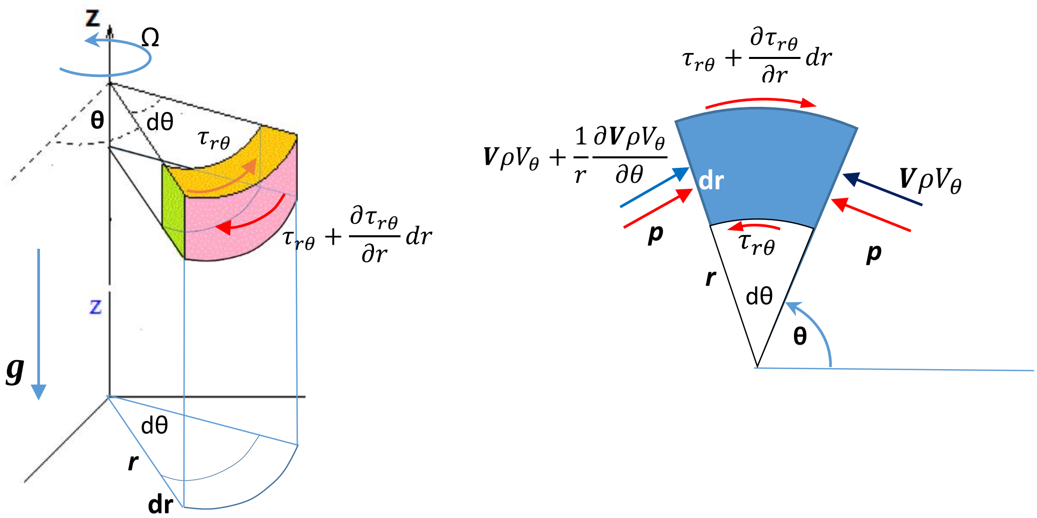


Fig 2.2.- volumen de control diferencial en la que se muestran los esfuerzos y el transporte de cantidad de movimiento asociado al flujo másico en la dirección azimutal.

La componente acimutal θ de la ecuación (1) en coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V_\theta + \frac{1}{r}V_r V_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \mu\left(\nabla^2 V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) \tag{2}$$

Bajo los supuestos planteados anteriormente para este problema, casi todos los términos son cero, excepto el último.

$$0 = \left(\nabla^2 V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2}\right) \tag{3}$$

$$\nabla^2 V_\theta = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) \tag{4}$$

Entonces la ecuación 3 se puede escribir así,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{V_\theta}{r^2} = 0 \tag{5}$$

Que es la ecuación diferencial a resolver.

Como $V_\theta(r)$ es función solo de r, la ecuación (5) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_\theta}{dr}\right) - \frac{V_\theta}{r^2} = 0$$

Ecuación que se puede resolver asi,

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_\theta}{dr}\right) + \frac{1}{r}\frac{dV_\theta}{dr}\right] - \left[\frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_\theta}{dr}\right] = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d(rV_\theta)}{dr}\right) - \left(\frac{1}{r^2}\frac{d(rV_\theta)}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rV_\theta)}{dr}\right) = 0$$

Integrando, una vez,

$$\frac{1}{r}\frac{d(rV_\theta)}{dr} = C_1$$

Separando variables, volviendo a integrar y despejado V_θ, se tiene finalmente,

$$V_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{6}$$

Las constantes pueden ser calculadas a partir de las condiciones de frontera:

Para $r=r_i$; $V_\theta = \Omega r_i$ → $\Omega r_i = C_1 r_i + \frac{C_2}{r_i}$

Para $r=r_0$; $V_\theta = 0$ → $0 = C_1 r_0 + \frac{C_2}{r_0}$ → $C2 = -C_1 r_0^2$

$$C_1 = \frac{\Omega r_i}{r_i - \frac{r_0^2}{r_i}} = \frac{\Omega r_i}{r_0\left(\frac{r_i}{r_0} - \frac{r_0}{r_i}\right)}$$

Finalmente la solución para la ecuación de distribución de velocidad es

$$V_\theta = \Omega r_i \frac{\left(\frac{r_0}{r} - \frac{r}{r_i}\right)}{\left(\frac{r_0}{r_i} - \frac{r_i}{r_0}\right)} \qquad (7)$$

Ahora, de la componente azimutal de la ecuación de Newton de la viscosidad en coordenadas cilíndricas, se puede obtener la distribución de esfuerzo cortante como función de r, $\tau_{r\theta}(r)$:

$$\tau_{r\theta} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

Teniendo en cuenta que Vr = 0 y que $V_\theta(r)$, se tiene;

$$\tau_{r\theta} = -\mu\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\right] \qquad (8)$$

Dividiendo la ecuación (7) entre r, derivando la ecuación resultante y reemplazando en (8), se obtiene

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\Omega\frac{1}{r^2}\left[\frac{r_0 r_i}{\frac{r_0}{r_i} - \frac{r_i}{r_0}}\right] \qquad (9)$$

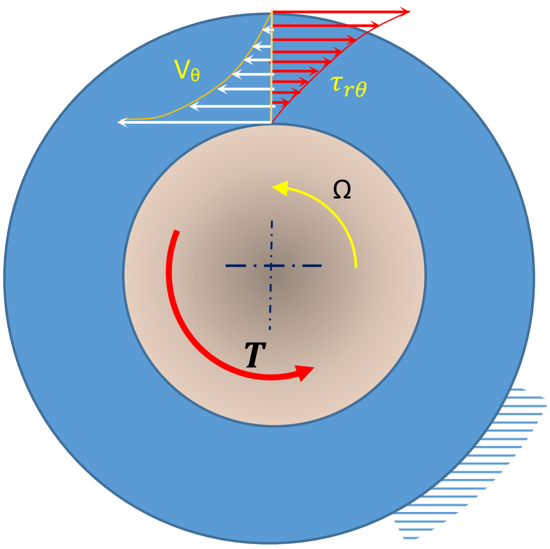
El par necesario para hacer girar el cilindro interior (eje) puede calcularse fácilmente a partir de la definición (fuerza por brazo).

$$T = F_\theta \cdot r_i = A_l \tau_{r\theta}|_{r=r_i} \cdot r_i$$

$$T = 2\pi \cdot r_i \cdot L \cdot 2\mu\Omega\frac{1}{r_i^2}\left[\frac{r_0 r_i}{\frac{r_0}{r_i} - \frac{r_i}{r_0}}\right] \cdot r_i$$

$$T = 4\pi\mu\Omega L\left[\frac{(r_0 r_i)^2}{r_0^2 - r_i^2}\right] \qquad (10)$$

En la figura se muestra el perfil de distribución de velocidad y esfuerzo cortante.



Este sistema es un modelo aceptable para cojinetes de fricción, también se construyen cierto tipo de viscosímetros-basados en este modelo- que permiten medir la viscosidad de fluidos midiendo el par de torsión y la velocidad angular.

Obsérvese que en este tipo de dispositivos el flujo fluido se debe al "arrastre viscoso" debido a la rotación del eje, y no a un gradiente de presión en la dirección tangencial, en cambio si hay un gradiente de presión en la dirección radial.

¿Cómo cambia el modelo de distribución de velocidades y tensiones tangenciales si, (a) el cilindro exterior es el que gira y el interior permanece estático? Y (b) si ambos cilindros giran, uno en sentido contrario al otro?