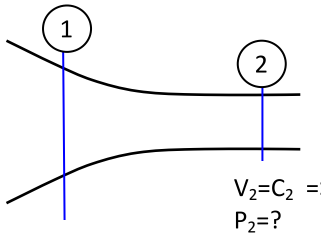
Problema 1. Entra gas helio a una tobera a 0.8 MPa, 500 K y con una velocidad de 120 m/s. Considere un flujo isentrópico y determine la presión y la temperatura del helio en una sección donde la velocidad sea igual a la velocidad del sonido. ¿Cuál es la razón del área de esta sección al área de entrada?

Análisis de datos e incógnitas

Los datos disponibles y las incógnitas se muestran en la figura.



$V_2=C_2$ => M=1
P_2=?
T_2=?
A_2/A_1=?

p_1=0.8Mpa
T_1=500 K
V_1=120 m/s

Propiedades para el helio (de tablas):
R= 2.077 kJ/kg · K; c p=5.193 kJ/kg · K; k=1.667

Ecuaciones básicas, clave

Relaciones entre las condiciones de estancamiento y las estáticas

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \qquad (1)$$

$$\frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (2)$$

Número de Mach

$$M = \frac{V}{c}; \qquad (3)$$

$$c = \sqrt{kRT} \qquad (4)$$

Ecuación del gas ideal

$$\frac{p}{\rho} = RT. \qquad (5)$$

Ecuación de continuidad

ρVA=Cte (6)

Como la velocidad en la sección 2 es igual a la velocidad del sonido, entonces de la ecuación 3: M_2=1
Además, bajo la hipótesis de flujo ideal isentrópico en la tobera, la temperatura y presión de estancamiento no cambian a lo largo de la tobera, es decir $T_{01} = T_{02} = T_0$; $p_{01} = p_{02} = p_0$

Resolución

Calculo de T_0 y p_0

Primero calculamos la temperatura y presión de estancamiento debido a que estos parámetros son esenciales para calcular tanto la temperatura como la presión estáticas en la sección 2.
A partir de los datos de entrada y con las ecuaciones (3) y (4), se tiene

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{120}{\sqrt{1.667*2077*500}} = 0.0912$$

Reemplazando en la ecuación 1 y despejando, T_0

$$T_0 = T_1\left(1 + \frac{k-1}{2}{M_1}^2\right) = 500\left(1 + \frac{1.667-1}{2} * 0.091^2\right) = 501.4 \text{ K}$$

Con la ecuación (2) calculamos p_0

$$p_0 = p_1\left(1 + \frac{k-1}{2}{M_1}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0.8\left(1 + \frac{1.667-1}{2}0.091^2\right)^{\frac{1.667}{1.667-1}} = 0.806 \text{ MPa}$$

Calculo de T_2 y p_2

Aplicando nuevamente la ecuación(1), pero esta vez a la sección 2 y despejando T_2, se tiene:

$$T_2 = \frac{T_o}{1+\frac{k-1}{2}{M_2}^2} = \frac{501.4}{1+\frac{1.667-1}{2}1^2} = \mathbf{376\ K}$$

Del mismo modo para p_2, aplicamos la ecuación (2), en la sección de flujo 2,

$$p_2 = p_0\left(1 + \frac{k-1}{2}{M_2}^2\right)^{-\left(\frac{k}{k-1}\right)} = p_0\left(1 + \frac{1.667-1}{2}1^2\right)^{-\left(\frac{1.667}{1.667-1}\right)} = \mathbf{0.392\ Mpa}$$

Calculo de la relación de áreas. A_2/A_1

A partir de la ecuación de continuidad (6),

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}$$

La velocidad y la densidad en la sección de flujo 2, se calculan a partir de las ecuaciones 4 y 5 respectivamente:

$$V_2 = c_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1.667 * 2077 * 376} = 1141 \text{ m/s}; \quad \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{392}{2.077*376} = 0.502 \text{ kg/m}^3$$

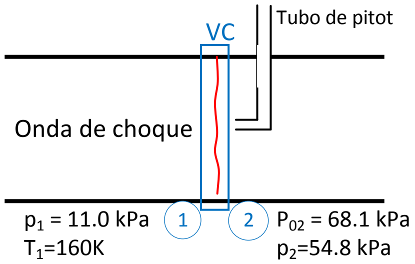
$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{800}{2.077*500} = 0.770 \text{ kg/m}^3$$

Finalmente;

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2} = \frac{0.770*120}{0.502*1141} = \mathbf{0.161}$$

Problema 2. Una onda de choque normal ocurre cuando se inserta un tubo de pitot estático dentro de un túnel de viento supersónico. Las presiones medidas por el tubo son p_{02}=68.1 kPa (abs) y p_2 = 54.8 kPa (abs). Antes de la onda, T_1=160K y p_1 = 11.0 kPa (abs). Calcule la velocidad del aire en el túnel de viento.

Análisis de datos e incógnitas



Propiedades para aire estandar:
R= 0.2870 kJ/kg · K; k=1.4

Ecuaciones básicas, clave

Recordando que el flujo a través de una onda de choque es irreversible, adiabático y sin fricción, las ecuaciones fundamentales de flujo para el volumen de control que contiene a la onda de choque, se pueden escribir así:

Ecuación de continuidad

$$\rho VA=Cte \qquad (1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$p_1 - p_2 = \rho_1 V_1(V_2-V_1)= \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \qquad (2)$$

Primera ley de la termodinámica

$$h_{01} = h_{02} \rightarrow T_{01} = T_{02} = T_0 \qquad (3)$$

Relaciones entre la presión de estancamiento y la estática

$$\frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (4)$$

Número de Mach

$$M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{kRT}} = \frac{V}{\sqrt{kp/\rho}} \qquad (5)$$

Ecuación del gas ideal

$$\frac{p}{\rho} = RT. \qquad (6)$$

Resolución

Primero realizamos algunos cálculos previos de los parámetros que serán necesarios para el cálculo de la velocidad en el túnel.

Número de Mach después de la onda de choque

A partir de la ecuación (4)

$$\frac{p_{o2}}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M_2{}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow \frac{68.1}{54.8} = \left(1 + \frac{1.4-1}{2}M_2{}^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} \rightarrow M_2 = 0.566$$

Densidad del aire antes de la onda de choque

De la ecuación del gas ideal (6)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{11.0}{0.2870 * 160} = 0.2395 \text{ kg/m}^3$$

Calculo de la velocidad en el túnel, V_1

A partir de la ecuación (2), combinándola con la ecuación (5), se puede obtener una ecuación para calcular M_1

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \qquad (7)$$

$$V_2 = M_2\sqrt{kp_2/\rho_2} \rightarrow \rho_2 V_2^2 = M_2^2 k p_2 \qquad (8)$$

Reemplazando (8) en la ecuación (7)

$$p_1 - p_2 = M_2^2 k p_2 - \rho_1 V_1^2 \qquad (9)$$

reemplazando valores en (9) y despejando la velocidad tenemos, finalmente

$$11000-54800 = 0.566^2 x1.4x54800 - 0.24V_1^2$$

$$\mathbf{V_1=533.77\ m/s}$$