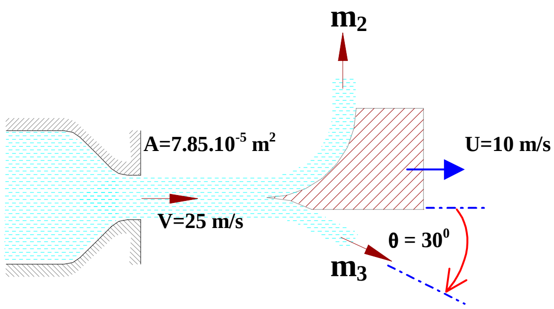
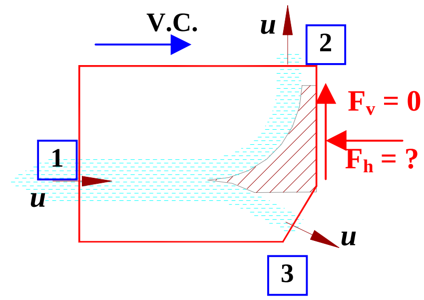
Problema Un chorro plano de agua incide sobre un álabe divisor y se parte en dos corrientes planas en la forma en que se indica. Encuentre la relación del flujo másico, $\dot{m}_2 / \dot{m}_3$, requerida para producir una fuerza vertical neta igual a cero sobre el álabe divisor. Obtenga la fuerza horizontal que debe aplicarse bajo estas condiciones, para mantener movimiento del álabe a una velocidad uniforme.





Solución:

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad adaptadas para flujo permanente son de utilidad en este caso:

$$\sum F = \oiint_{s.c.} \mathbf{V}\rho\, V\cdot \mathbf{dA} \qquad\qquad \oiint_{s.c.} \rho\, \mathbf{V}\cdot \mathbf{dA} = \mathbf{0}$$

Si asumimos un V.C. fijo en el álabe. Entonces el V.C. se moverá con velocidad cte. **U=10** m/s. En estas condiciones el fluido ingresara al volumen de control con una velocidad **u** relativa al álabe. Si además suponemos que esta velocidad no cambia en magnitud a lo largo del álabe. Los vectores velocidades de entrada y salida del fluido respecto del volumen de control, estarán dadas por:

$$u_1 = ui$$
$$u_2 = uj$$
$$u_3 = u\tfrac{\sqrt{3}}{2}\, i + u\tfrac{1}{2}\, j$$

Hipótesis:

Flujo permanente

Flujo uniforme en las secciones de entrada y salida de la superficie de control

Flujo incompresible

Entonces las componentes horizontal y vertical de la ecuación (1), aplicada al volumen de control mostrado en la figura, serán:

Componente horizontal:

$$-F_h = \int_{A_1} u_{1x}\rho u_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} u_{2x}\rho u_2 \cdot dA_2 + \int_{A_3} u_{3x}\rho u_3 \cdot dA_3 \qquad (3)$$

$$-F_h = -\int_{A_1} u\rho u\; dA_1 + \int_{A_3} \tfrac{\sqrt{3}}{2} u\;\; \rho u dA_3 = -(um_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2} u\; m_3)$$

$$\boxed{\therefore\; F_h = um_1\left(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_3}{m_1}\right) \qquad (3a)}$$

Componente vertical

$$F_v = \int_{A_1} u_{1y} \rho u_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} u_{2y} \rho u_2 \cdot dA_2 + \int_{A_3} u_{3y} \rho u_3 \cdot dA_3 \qquad (4)$$

$$F_v = -\int_{A_1} u \tfrac{1}{2} \rho u \, dA_3 + \int_{A_2} u \rho u \, dA_2 = u m_2 - \frac{u}{2} m_3$$

$$\boxed{\therefore \quad F_v = u(m_2 - \frac{m_3}{2}) \qquad (4a)}$$

De la ecuación 4a, para $F_v=0$ (condición del problema) tenemos:

$$\boxed{\frac{m_2}{m_3} = \frac{1}{2}}$$

De la ecuación de continuidad (2), *aplicada al volumen de control se tiene:*

$$m_2 + m_3 = m_1 \qquad (5)$$

de donde

$$\boxed{\frac{m_1}{m_3} = 1 + \frac{m_2}{m_3} = \frac{3}{2}}$$

Donde el flujo másico de entrada al volumen de control por la sección 1 esta dada por:

$$m_1 = \rho u A$$

Reemplazando en la ecuación 3(a)

$$\boxed{F_h = u \rho u A(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \tfrac{2}{3}) = \rho u^2 A(1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}})}$$

Cuando el volumen de control está en movimiento, se debe tener cuidado al calcular la velocidad del fluido respecto del volumen de control en este caso la velocidad, ***u, esta dada por:***

$$u = V - U = (25 - 10) = 5 m/s$$

Finalmente la fuerza horizontal será:

$$F_h = 1000 \cdot 15^2 7.85 \cdot 10^{-5} (1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = 7.46 \quad N$$

$$\boxed{F_h = 7.46 \quad N}$$