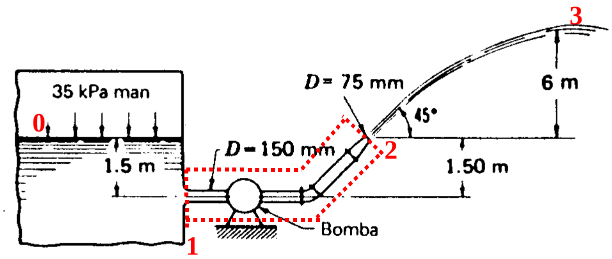
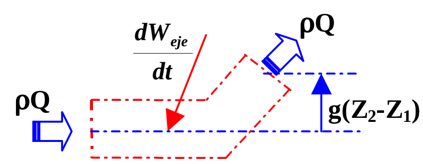
Problema (Shames) Dentro de un tanque grande se encuentra agua con una presión manométrica de 35 kPa en su superficie libre. Ésta se bombea a través de una tubería, como se muestra, y sale a través de una boquilla para formar un chorro libre. Utilizando los datos dados, ¿cuál es la potencia requerida por la bomba?.



Volumen de control



Solución

Las ecuaciones a utilizar en la solución de este problema son:

Ecuación de energía:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{eje}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{v.c.} e\rho\, d\forall + \oiint_{S.C.} \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho v \cdot dA \qquad (1)$$

Volumen de control con dos secciones de flujo (entrada A_1 y salida A_2)

Flujo permanente

Flujo uniforme

Flujo incompresible

Flujo sin transferencia de calor con el medio (no se toma en cuenta la fricción interna)

Variación de la energía interna despreciable.

En esta condiciones la ecuación (1), aplicada al volumen de control mostrado en la figura, resulta:

$$-\left(-\frac{dW_{bomba}}{dm}\right) = \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gZ_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gZ_1\right) \qquad (2)$$

Ecuación que permite calcular la potencia añadida por la bomba, en función de la diferencia de energía mecánica del fluido entre la salida y la entrada al V.C.

Ecuación de Bernoulli:

La energía mecánica total del fluido en la entrada de volumen de control, 1, se puede calcular utilizando la ecuación de Bernoulli, bajo el supuesto de flujo ideal en el interior del tanque. Asi, la ecuación de Bernoulli aplicada a una línea de corriente entre los puntos, 0 y 1 (nivel superior del tanque y entrada al tubo), se puede escribir del siguiente modo:

$$\frac{v_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+gZ_0=\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gZ_1 \qquad (3)$$

Entonces combinado las ecuaciones 2 y 3 se tiene:

$$\frac{dW_{bomba}}{dm}=\left(\frac{v_2^2}{2}+\overbrace{\frac{p_2}{\rho}}^{0}+gZ_2\right)-\left(\overbrace{\frac{v_0^2}{2}}^{\text{desp.}}+\frac{p_0}{\rho}+gZ_0\right)$$

$$\frac{dW_{bomba}}{dm}=\frac{v_2^2}{2}+g(Z_2-Z_0)+\frac{p_0}{\rho} \qquad (J/kg)$$

$$\boxed{\frac{dW_{bomba}}{dt}=\left(\frac{v_2^2}{2}+g(Z_2-Z_0)+\frac{p_0}{\rho}\right)\rho v_2 A_2 \qquad (w)} \qquad (4)$$

La velocidad puede ser calculada, aplicando la ecuación de Bernoulli, a una línea de corriente del chorro libre entre 2 - 3, Por tratarse de un flujo aproximadamente ideal (sin fricción).

$$\frac{v_2^2}{2}+\overbrace{\frac{p_2}{\rho}}^{0}+gZ_2=\frac{v_3^2}{2}+\overbrace{\frac{p_3}{\rho}}^{0}+gZ_3$$

$$v_2^2=v_3^2+2g(Z_3+Z_2) \qquad (5)$$

El valor de la velocidad del fluido en la cúspide V_3, es igual a la componente horizontal de la velocidad a la salida de la tobera, V_2.

$$(6) \qquad v_3=v_2\cos 45=\frac{v_2}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando (6) en la ecuación 5:

$$(7) \qquad v_2=2\sqrt{g(Z_3+Z_2)}$$

$$\boxed{v_2=2\sqrt{g6}=15.34m/s}$$

$Z_2 - Z_0 = 0$ m
$P_0 = 35000$ Pa (man)
$A_2=\frac{\pi}{4}D_2^2=\frac{\pi}{4}0.075^2=0.00442\ m^2$
$\rho = 1000$ kg/m^3

Reemplazando estos datos numéricos en la ecuación (4), se calcula la potencia buscada.